1. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

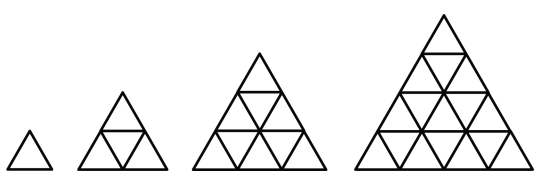
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

2. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ⋯ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{\log_3 a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다. 이때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 18 ④ 27 ⑤ 32

해설

$\log_3 a_n = 0 + \frac{1}{2}(n-1)$

$a_n = 3^{\frac{1}{2}(n-1)}$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$

$= 3^0 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^1 \times 3^{\frac{3}{2}}$

$= 3^{0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

4. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

5. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$
$a_{11} = a + 10d = 15$
연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$
$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$
$-2n + 37 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$37 < 2n, \quad 18.5 < n$
$\therefore\ n = 19$
$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19}이다.

6. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

7. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore\ x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

8. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 80

해설

$a_1 = -10,\ a_7 = -10 + 6d$

$S_7 = \dfrac{7\{2\cdot(-10) + 6d\}}{2},\ a_7 = S_7$에서 $d = 4$

$S_{10} = \dfrac{10\{2\cdot(-10) + 9\cdot 4\}}{2} = 80$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4+a_7+a_{10}=11$, $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=20$ 일 때, a_{50}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$a_n=a+(n-1)d$라고 하면

$a_4+a_7+a_{10}=3a+18d=11$

$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5a+35d=20$

$\therefore\ a=\frac{5}{3},\ d=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{50}=18$

10. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33-17+1)(51+99)}{2}$$

$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

11. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 20이고, 공차는 d인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n > 0$을 만족하는 n의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$a_7 \cdot a_8 < 0$에서 $a_7 > 0,\ a_8 < 0$

$a_7 = 20 + 6d > 0,\ a_8 = 20 + 7d < 0$

이때 공차 d는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$n(43 - 3n) > 0,\ n(3n - 43) < 0$

$$\therefore\ 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

12. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + n + \alpha$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + n + \alpha$에서

(i) $n = 1$일 때 $S_1 = a_1 = 2 + 1 + \alpha = 3 + \alpha$

(ii) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n + \alpha - \{2(n-1)^2 + (n-1) + \alpha\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

그런데 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$3 + \alpha = 4 \cdot 1 - 1$

$\therefore\ \alpha = 0$

13. 등비수열 $\sqrt{2}+1,\ 1,\ \sqrt{2}-1,\ 3-2\sqrt{2},\cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$

④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

공비를 r 이라 하면 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ a_n=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

$\therefore\ a_{100}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99}$

$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98}$

$=(\sqrt{2}-1)^{98}$

14. 부피가 8이고 겉넓이가 28인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면

(부피)$= a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots$ ㉠

(겉넓이)$= 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$

$= 2\left\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \dfrac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

15. 서로 다른 세 실수 9, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, 9, b는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{45}{2}$ ② $-\frac{48}{2}$ ③ $-\frac{41}{2}$ ④ $-\frac{39}{2}$ ⑤ $-\frac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 9, a, b가 등차수열을 이루므로

$a=\frac{9+b}{2}$ ……㉠

세 수 a, 9, b가 등비수열을 이루므로

$9^2=ab$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$81=\frac{9+b}{2}\cdot b$, $b^2+9b-162=0$

$(b+18)(b-9)=0$

$\therefore b=-18$ 또는 $b=9$

즉, $b=-18$일 때 $a=-\frac{9}{2}$이고, $b=9$일 때 $a=9$

이때, a, b는 서로 다른 실수이므로

$a=-\frac{9}{2}$, $b=-18$

$\therefore a+b=-\frac{45}{2}$

16. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

$r^{10}+1 = 6$이므로 $r^{10} = 5$

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$이므로

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5\cdot(r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5\cdot(5^2+5+1) \\ &= 5\cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

17. 두 수 A, B에 대하여 $A=2^{10}$, $B=5^{10}$일 때, 두 수 A, B의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$
② $(5A-1)(5B-1)$
③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$
④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$
⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB=2^{10}\cdot 5^{10}$
따라서 AB의 양의 약수의 총합은
$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$
$=\frac{2^{11}-1}{2-1}\times\frac{5^{11}-1}{5-1}$
$=(2\cdot 2^{10}-1)\times\frac{1}{4}(5\cdot 5^{10}-1)$
$=(2A-1)\times\frac{1}{4}(5B-1)$
$=\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

18. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$=$ 1000만$\times 1.04^{10}$
$=$ 1000만 $\times 1.48$
$=$ 1480만(원)

19. 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n + p\}$가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$S_n = \frac{3^n - 1}{2}$, $S_n + p = \frac{3^n - 1 + 2p}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{2p - 1}{2}$

그런데 $S_n + p$가 등비수열을 이루므로

$\frac{2p - 1}{2} = 0 \quad \therefore \ p = \frac{1}{2}$

20. 수열 $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \cdots$ 의 일반항 a_n을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ ② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$ ④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots$ 에서

$9 = 10^1 - 1,\ 99 = 10^2 - 1,\ 999 = 10^3 - 1,\ 9999 = 10^4 - 1, \cdots$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$ 이다.

수열 $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \cdots$ 의 각 항은

$3 = 9 \times \frac{1}{3},\ 33 = 99 \times \frac{1}{3},\ 333 = 999 \times \frac{1}{3},\ \cdots$ 이므로

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ 이다.

21. 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루고 $a+b+c=3,\ abc=-3$을 만족할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

공차를 d라 하면

$a=b-d,\ c=b+d$

$a+b+c=3b=3\ \ \therefore b=1$

$abc=(1-d)(1+d)=-3$

$1-d^2=-3$

$d^2=4$

$\therefore d=\pm 2$

(i) $d=2$일 때,

$(a,b,c)=(-1,1,3)$

$a^2+b^2+c^2=1+1+9=11$

(ii) $d=-2$일 때,

$(a,b,c)=(3,1,-1)$

$a^2+b^2+c^2=9+1+1=11$

$\therefore a^2+b^2+c^2=11$

22. 같은 크기의 통나무를 맨 아래 단에 $2n$ 개를 놓고, 위로 올라가면서 1 개씩 줄여서 n 단이 되도록 쌓으려고 한다. 그림은 맨 아래 단에 6 개를 놓고 3 단으로 통나무를 쌓은 것이다. 이와 같은 방법으로 맨 아래 단에 30 개를 놓고 15 단을 쌓을 때, 필요한 통나무의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 345 개

해설

통나무의 개수는 맨 아래 단부터 30, 29, 28, $\cdots$ 이고, 모두 15 단이 있으므로 첫째항이 30, 공차가 -1, 항의 개수가 15 인 등차수열의 항을 이룬다.
따라서 전체 통나무의 개수는

$$\frac{15 \cdot \{2 \cdot 30 + 14 \cdot (-1)\}}{2} = 345(\text{개})$$

23. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A = \dfrac{a+b}{2}$, $G =$ ㉠, $H = \dfrac{\text{㉡}}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a = b$일 때 성립), ㉢ $= G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$

② (㉡) - ab

③ (㉢) - $A \times H$

④ (㉣) - 등비중항

⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,
$\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

24. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$a_1 = \frac{1}{2},\ r = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore |S_n - 1| = |1 - \frac{1}{2^n} - 1| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

$1000 < 2^n$ 인 n 의 최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024,\ 2^9 = 512$ 이므로 $2^n > 1000$ 인 n 의 최솟값은10

25. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 $r\%$로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r을 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

① $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=10^5$

② $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2\times10^5$

③ $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=3\times10^5$

④ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$

⑤ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^6=2\times10^5$

해설

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리합계는 $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 $r\%$인 대출금 90만원에 대한 5년 후의 원리합계는 $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만원의 정기예금에서 90만원을 대출하고 10만원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리합계와 대출금의 원리합계의 차가 10만원이면 된다.

$\therefore\ 9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$