1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1,\ a_{11} = 32$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k)$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k)$
$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{11} - a_{10})$
$= a_{11} - a_1 = 32 - 1 = 31$

2. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7i}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7\sum_{j=1}^{10} j\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + 7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(385+385) = 385$

3. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2a_k - 3b_k + 5) \right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{ 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5 \right\}$

$= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$

$= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n)$

$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

$= 550$

4. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

5. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

6. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5 ② -7 ③ -8 ④ -79 ⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$
$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$
$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$
$=1-9=-8$

7. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \cdots$ 의 제 15항까지의 합은?

① $\sqrt{14}-1$　　② $\sqrt{15}-1$　　③ 3

④ $\sqrt{15}+1$　　⑤ 5

해설

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=-\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$-\left\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\right\}$

$=-(1-\sqrt{16})=\sqrt{16}-1=4-1=3$

8. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{200}{201}$ ④ $\frac{110}{101}$ ⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$

9. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

10. 두 등차수열 a_n, b_n에 대하여 $a_1+b_1=5$, $a_{10}+b_{10}=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은?

① 75 ② 85 ③ 95 ④ 105 ⑤ 115

해설

$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{10(a_1+a_{10})}{2} + \dfrac{10(b_1+b_{10})}{2} = 5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$
$= 5(a_1+b_1)+5(a_{10}+b_{10}) = 5\times5+5\times10 = 75$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}) = (3n+2)^2$ 을 만족할 때, $\sum_{k=31}^{60} a_k$ 의 값은?

① 2520 ② 2620 ③ 2720 ④ 2820 ⑤ 2920

해설

$\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$
$= (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$
$= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{3n}$
$= \sum_{k=1}^{3n} a_k = (3n+2)^2$
$\sum_{k=31}^{60} a_k = \sum_{k=1}^{60} a_k - \sum_{k=1}^{30} a_k$
$= (3\cdot 20+2)^2 - (3\cdot 10+2)^2$
$= 62^2 - 32^2 = 3844 - 1024 = 2820$

12. $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 은 0, 1, 2 중 어느 하나의 값을 갖는다. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 40,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 70$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k^3$ 의 값은?

① 110　　② 120　　③ 130　　④ 140　　⑤ 150

해설

$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 중 1의 개수를 x, 2의 개수를 y라고 하면

$\sum_{k=1}^{n} a_k = x + 2y = 40 \cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = x + 4y = 70 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 10,\ y = 15$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = x + 8y = 10 + 120 = 130$

13. $S=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=2}^{10}k+\sum_{k=3}^{10}k+\cdots+\sum_{k=9}^{10}k+\sum_{k=10}^{10}k$일 때, $\frac{1}{5}S$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$S=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=2}^{10}k+\sum_{k=3}^{10}k+\cdots+\sum_{k=9}^{10}k+\sum_{k=10}^{10}k$

$=1+2+3+4+\cdots+10$

$+2+3+4+\cdots+10$

$3+4+\cdots+10$

$\vdots$

$+10$

$=1+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$

$\therefore\ \frac{1}{5}S=77$

14. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $b_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right)$의 값은?

① 4000　② 4100　③ 4200　④ 4300　⑤ 4400

해설

$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$

$b_n = n^2 + n = n(n+1)$

$\therefore \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left\{\sum_{i=1}^{4} i(i+1)(i+2)\right\} \times \sum_{j=1}^{3} j(j+1)$

$= \sum_{i=1}^{4}(i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^{3}(j^2 + j)$

$$= \left\{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6} + 2\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\right\}$$

$$\times\left(\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} + \frac{3\cdot 4}{2}\right)$$

$= 210 \times 20 = 4200$

15. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56$이므로

$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$

$\therefore n = 6$

16. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n} 12 \cdot \left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = 6\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= 6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$

즉, $2n(n+1)(n+2) = 1008$ 이므로

$n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

$\therefore\ n = 7$

17. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

18. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 4 \cdot 8,\ 3 \cdot 6 \cdot 12,\ 4 \cdot 8 \cdot 16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400　　② 1100　　③ 12100

④ 24200　　⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$

19. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$의 값은?

① 1310 ② 1320 ③ 1330 ④ 1340 ⑤ 1350

해설

$1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$
$= 1 \cdot (20-1) + 2 \cdot (20-2) + 3 \cdot (20-3) + \cdots + 19 \cdot (20-19)$
$= \sum_{k=1}^{19} k(20-k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2)$
$= 20 \times \dfrac{19 \cdot 20}{2} - \dfrac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$
$= 190(20-13) = 1330$

20. $\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1+\frac{1}{k}\right)$ 의 값은?

① $\log_2 3$ ② $\log_2 15$ ③ $\log_2 30$

④ 3 ⑤ 4

해설

$\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k}$

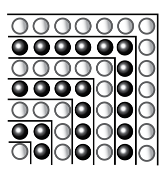
$= \sum_{k=1}^{15} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\}$

$= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \cdots$

$+ (\log_2 16 - \log_2 15)$

$= \log_2 16 - \log_2 1 = \log_2 2^4 = 4$

21. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



① $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)^2}{2}\right\}$

④ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면
흰돌의 수$=1$
검은돌의 수 $=3$
흰돌의 수$=5$
즉 $1,\ 3,\ 5,\cdots$ 이런 식으로
돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.
그런데 그림에 놓인 돌의 개수는
가로의 길이와 세로의 길이가 같으므로
$n\times n=n^2$ 임을 알 수 있다.
$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

22. 수열 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$ 의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$　② $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　④ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+3)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+3)$

해설

$a_n = 1+2+\cdots+n$

$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$= \frac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{2\cdot 6}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

23. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

24. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 - n + 3$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \left\{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\right\} \\ &= 4n - 3 \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

25. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$ ② $\sqrt{n+1}-1$ ③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1}+1$ ⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$= \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

26. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$일 때, $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(2x+1)}$의 값은?

① 8　　② $\sqrt{99} - 1$　　③ 9

④ $\sqrt{99} + 1$　　⑤ 10

해설

$f(2x+1) = \sqrt{2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 - 1}}$

$= \sqrt{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x}}$

$= \sqrt{(x+1) + x + 2\sqrt{(x+1) \cdot x}}$

$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

$\frac{1}{f(2x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\sum_{k=1}^{99} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$

$= \sqrt{100} - 1$

$= 10 - 1 = 9$

27. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(n-3)}{(n+1)(n+2)}$ ② $\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$
③ $\frac{n(n+6)}{3(n+1)(n+2)}$ ④ $\frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+3)}$
⑤ $\frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

해설

$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 이므로

(준식)$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$

$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots$

$+ \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$

28. 수열 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 50까지의 합은?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{49}{50}$ ④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{50}{51}$

해설

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$

따라서, 이 수열의 첫째항부터 제 50항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{51}\right)$

$= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$

29. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{n}{2n-1}$ ② $\dfrac{2n}{2n-1}$ ③ $\dfrac{n}{2n+1}$
④ $\dfrac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\dfrac{n}{2n+3}$

해설

$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)$ 임을 이용한다.

$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\right\}$

$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{n}{2n+1}$

30. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 의 값은?

① $\frac{17}{19}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \left\{(n-1)^3 - (n-1)\right\} = 3n(n-1)(n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) (n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{60}$

31. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2(n \geq 2)$

$a_1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$ 이므로, $a_n = 2n + 2(n \geq 1)$

$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{4} \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right)\right\}$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{24}$

32. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$

33. 수열의 합 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S=\dfrac{n(1-x^n)}{2}$　　② $S=\dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S=\dfrac{1-x^n}{2}-\dfrac{2x^n}{x}$　　④ $S=\dfrac{1-x^n}{1+x}-\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S=\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1} \\ -)\ xS= & \quad\ \ x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^n+nx^n \\ \hline (1-x)S= & 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n\cdot x \end{array}$$

$$=\frac{1(1-x^n)}{1-x}-n\cdot x^n$$

$$\therefore S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

34. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9-1)}{2-1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

35. 수열$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + 13\cdot 2^6 + 15\cdot 2^7 \cdots\cdots$ ㉠

$2S = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + 13\cdot 2^7 + 15\cdot 2^8 \cdots\cdots$ ㉡

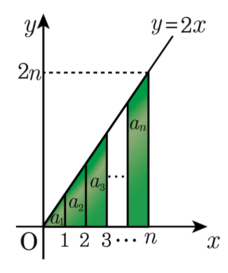
이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$-S = 2\cdot\dfrac{(2^8-1)}{2-1} - 1 - 15\cdot 2^8$

$S = -2\cdot 2^8 + 2 + 1 + 15\cdot 2^8$

$= 13\cdot 2^8 + 3 = 3331$

36. 오른쪽 그림과 같이 각 영역의 넓이를 차례로 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

a_n 은 삼각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있으므로

$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n - \frac{1}{2}(n-1) \cdot 2(n-1) = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore a_1 = 1,\ a_{10} = 19$

$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \frac{10(1+19)}{2} = 100$

37. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d \neq 0)$라 하면

$a_n = (n-1)d$

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $nd \cdot b_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)d$

$nd \cdot b_n = d\left\{\frac{n(n+1)}{2} - n\right\}$, $b_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$

$b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$

38. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로
$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$
$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 각각 대입하여 변끼리 곱하면
$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$
$\frac{S_n}{S_1} = n$ 이므로 $S_n = nS_1 = na_1 = n$
$\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S_1 + S_2 + \cdots S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

39. 자연수 n 이하의 모든 수의 곱을 $n!$로 나타낸다. 예를 들어 $5! = 5\times4\times3\times2\times1$이다. 이때, $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{10}{11!}$의 값은?

① $\frac{9}{10!}$　② $\frac{10}{11!}$　③ $1-\frac{1}{10!}$
④ $1-\frac{1}{11!}$　⑤ $1-\frac{1}{12!}$

해설

일반항을 a_n이라 하면 $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$이다.

여기서 분자를 변형하면 부분분수의 꼴로 바꿀 수 있다.

즉, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\therefore \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{2}{11!}$

$= \left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10!}-\frac{1}{11!}\right)$

$= 1-\frac{1}{11!}$

40. n이 자연수일 때, $n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$의 값은?

① 2^{n+1}　② $2^{n+1}-n$　③ $2^{n+1}-n-2$　④ 2^n+n2　⑤ $2^n n+2$

해설

주어진 식의 값을 S라 하면

$S=n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$

멱급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & 2S= & n\cdot 2+(n-1)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+2^n \\ -) & S= & n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2^{n-1} \\ \hline & S= & -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \end{array}$$

$\therefore S=-n+\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-n-2$

41. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^2$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

42. 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 ω^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 332

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0,\ \ \omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이때, $f(n)$은 ω^n의 실수 부분이고, $\omega^3=-1,\ \omega^2=\omega-1$이므로 $f(n)$을 차례로 구하면

$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\omega^2=\omega-1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(2)=-\frac{1}{2}$

$\omega^3=-1$이므로 $f(3)=-1$

$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega$이므로 $f(4)=-f(1)=-\frac{1}{2}$

$\omega^5=\omega^3\omega^2=-\omega^2$이므로 $f(5)=-f(2)=\frac{1}{2}$

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$이므로 $f(6)=-f(3)=1$

$\omega^7=(\omega^3)^2\cdot\omega=\omega$이므로 $f(7)=f(1)$ 따라서, $f(1)+(2)+\cdots+f(6)=0$

$\therefore\ \ \sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{999}f(k)+\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{3}$

$=166\sum_{k=1}^{6}f(k)+f(997)+f(998)+f(999)+999\cdot\frac{1}{3}$

$=166\cdot 0+f(1)+f(2)+f(3)+333$

$=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right)+333$

$=332$

43. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \frac{1}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$ ② $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
③ $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{2}{11}$ ④ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
⑤ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$이고,

$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= x\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$

$= x\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \frac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$

$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$

44. 다음은 수열의 합

$S=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}\cdots\cdots(1)$

을 계산하는 과정이다. 이때, ㉠ ~㉤에 들어갈 것으로 알맞지 않은 것은?

$S-xS$ 를 하면

$$\begin{array}{rl} S = & 1+2x+3x+\cdots+(n-1)x^{n-2}\,nx^{n-1} \\ -)\quad xS = & \\ \hline (1-x)S = & (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-㉡ \end{array}$$

(i) $x\neq 1$ 일 때,

(우변)$=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-㉡$

$=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{㉢}$

$\therefore S=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{㉣}$

(ii) $x=1$ 일 때, (1)에서

$S=1+2\cdot 1+3\cdot 1^2+\cdots+n\cdot 1^{n-1}$

$\therefore S=㉤$

① ㉠ $x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}$

② ㉡ nx^n

③ ㉢ $1-x$

④ ㉣ $(1-x)^2$

⑤ ㉤$n(n+1)$

해설

⑤ ㉤ $\dfrac{n(n+1)}{2}$