

1. 좌표평면에서 점 A(2, 1) 에 이르는 거리가 각각 $\sqrt{5}$ 인 두 점이 x 축 위에 있다. 이 두 점 사이의 거리는?

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축 위의 점을 P(x , 0) 이라 하면 $\overline{AP} = \sqrt{5}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = (x-2)^2 + (-1)^2 = 5$, $x^2 - 4x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 4$

따라서 x 축 위의 두 점은 (0, 0), (4, 0) 이므로 두 점사이의 거리는 4 이다

2. 점 A(-2,4)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 (1,2)가 되도록 점 B를 정할 때, 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는?

① (-16,8)

② (-8,16)

③ (-7,4)

④ (8,-16)

⑤ (16,-8)

해설

점 B의 좌표를 B(a,b)라 하면

선분 AB의 중점의 좌표가 (1,2)이므로

$$\frac{-2+a}{2} = 1, \frac{4+b}{2} = 2$$

$$\therefore a = 4, b = 0$$

따라서 두 점 A(-2,4), B(4,0)을 잇는

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 4 - 2 \times (-2)}{3 - 2}, \frac{3 \times 0 - 2 \times 4}{3 - 2} \right) = (16, -8)$$

3. 다음 중 점 $(-2, 3)$ 을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은?

① $2x + y = 7$

② $y = 2x + 7$

③ $y + 3 = 2(x + 2)$

④ $y = 2x + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$$\therefore y = 2(x + 2) + 3 = 2x + 7$$

4. x 축의 양의 방향과 60° 의 각을 이루고, 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 y 절편은?

① $3 - 2\sqrt{3}$

② $3 + 2\sqrt{3}$

③ $-3 - 2\sqrt{3}$

④ $-3 + 3\sqrt{3}$

⑤ $3 - 3\sqrt{3}$

해설

x 축과 60° 의 각을 이루므로

기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\therefore y - 3 = \sqrt{3}(x - 2)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 3$$

5. 직선 $2x - 3y = 1$ 과 수직이고, 점 $(4, 11)$ 를 지나는 직선의 y 절편은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

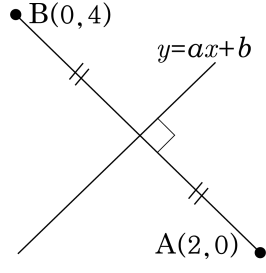
해설

$2x - 3y = 1$ 과 수직이므로 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + b$ 에 $(4, 11)$ 를 대입하면 $b = 5$

따라서 y 절편은 5이다.

6. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



- ① 4 ② 2 ③ 1 ④ -2 ⑤ -4

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{AB}$ 의 중점 M 은

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1, 2)$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

7. 세 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$, $5x+2y+k=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면

직선 $5x+2y+k=0$ 이 두 직선

$2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점을 지나야 한다.

두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점이 $(-1, 2)$ 이므로

$x=-1$, $y=2$ 를 $5x+2y+k=0$ 에 대입하면

$$5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + k = 0$$

$$\therefore k = 1$$

8. 원 $x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?
- ① 반지름의 길이가 2 인 원이다.
 - ② 원의 중심은 y 축 위에 있다.
 - ③ 원은 두 점 $(0, -2), (0, 2)$ 를 지난다.
 - ④ 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 존재한다.
 - ⑤ 원은 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ 을 변형하면
 $(x - k)^2 + y^2 = 4 + k^2$ 이므로
 $x = 0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2 = 4$
 $\therefore y = \pm 2$
따라서 주어진 원은
 $(0, -2), (0, 2)$ 의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

9. 두 원 $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2 = 0$ 의 공통현이 직선 $y = -3x - 1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 4
- ④ 8
- ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
 $2(x^2 + y^2 - x + 2y - 3) - (2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2) = 0$
즉, $4x + (4 - a)y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = -3x - 1$ 은 직교하므로
 $\frac{-4}{4 - a} \times (-3) = -1$ 에서 $a = 16$

10. 점 (x, y) 를 $(x-1, y+2)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(b+2, a-1)$ 가 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

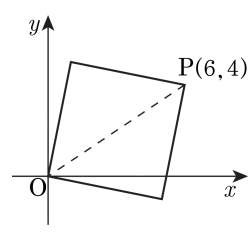
- ① $(a+3, b-3)$ ② $(a+2, b-1)$ ③ $(b+1, a-3)$
④ $(b-2, a+1)$ ⑤ $(b+1, a+1)$

해설

$$\begin{aligned} f(x : y) &\rightarrow (x-1, y+2) \\ \therefore (b+2, a-1) &\rightarrow (b+1, a+1) \end{aligned}$$

11. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

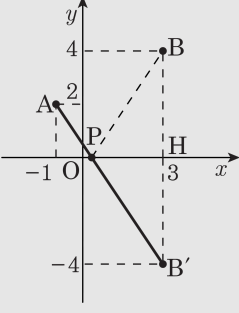
12. 두 점 A (-1, 2) , B (3, 4) 에 대하여 점 P 가 x 축 위를 움직일 때, AP + BP 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B' (3, -4)
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소거리는 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B'이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{AB'}$ 이 최소거리이다.

$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}$



13. $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2, 5)$, C $(7, 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

- ① $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$ ② $G\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ③ $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$
④ $G\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ ⑤ $G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, 4\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}, y = \frac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}, y = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

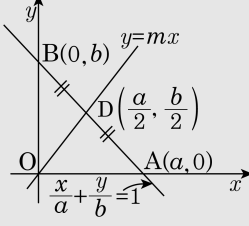
14. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y = mx$ 가 이등분할 때, m 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$)

- ① $\frac{b}{a}$
- ② $\frac{a}{b}$
- ③ $\frac{b}{2a}$
- ④ $\frac{a}{2b}$
- ⑤ $\frac{2a}{b}$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 중점을 $D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 라 하면 $\triangle OAD = \triangle OBD$ 이므로 직선 $y = mx$ 가 점 D 를 지나야 한다.

$$\therefore m = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{a}$$



15. 두 직선 $x + y = 1$, $ax + 2y + a + 2 = 0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x + y = 1 \cdots \textcircled{1}$
 $ax + 2y + a + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 : (a - 2)x + a + 4 = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{a + 4}{2 - a}$
 $\Rightarrow y = 1 - x = \frac{2a + 2}{a - 2}$
 $\therefore \text{교점} : \left(\frac{a + 4}{2 - a}, \frac{2a + 2}{a - 2} \right)$
교점이 제 1 사분면에 있으므로
 $\frac{a + 4}{2 - a} > 0, \frac{2a + 2}{a - 2} > 0$
두 식의 양변에 $(a - 2)^2$ 을 곱하면
 $(a - 2)(a + 4) < 0, 2(a + 1)(a - 2) > 0$
 $\Rightarrow -4 < a < 2, a < -1 \text{ or } a > 2$
 $\therefore -4 < a < -1$
 $\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

16. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$

② $(1, 1)$

③ $(0, 1)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
 a 의 값에 관계없이 점(0, 1) 을 지나는 직선이다.

17. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore 2x - y - 5 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

18. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

- ① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$
③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$
⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

19. 세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$

② $(-2, 3)$

③ $(2, -3)$

④ $(-2, -3)$

⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ 이라 하면}$$

이 원이 세점을 지나므로

$$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$$

$$\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$6^2 + 6a + c = 0$$

$$\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -4, \quad b = 6, \quad c = -12$$

즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로

표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

20. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

21. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?
- ① 서로 외부에 있다
 - ② 외접한다
 - ③ 두 점에서 만난다
 - ④ 내접한다
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$
 $\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

22. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 (2, 1)을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

23. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은

$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

24. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$ 에 의하여 직선 $2x + y + 5 = 0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

- ① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y + 2 = 0$ ③ $2x + y + 6 = 0$
④ $2x + y + 8 = 0$ ⑤ $2x + y + 9 = 0$

해설

$x' = x - 2$, $y' = y + 1$ 이라 하자.

x, y 를 원래 식에 대입하면,

$$2(x' + 2) + (y' - 1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x' + y' + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 8 = 0$$

25. 점 $(2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 $(2, 3)$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 $(2, 3)$ 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6 만큼 평행이동 시킨 것과 같다
 $\therefore m + n = -4 - 6 = -10$

26. 포물선 $y = -x^2 - 2x$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는?
- ① $(-1, 2)$ ② $(-1, -1)$ ③ $(-1, 1)$
- ④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 1)$

해설

포물선 $y = -x^2 - 2x$ 의 꼭짓점은 $(-1, 1)$ 이다.
포물선 $y = -x^2 - 2x$ 을
 x 축에 대하여 대칭이동한 후
 y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동시켰으므로
꼭짓점은 $(-1, 1) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (-1, 2)$ 로 이동한다.

27. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 을 점 (2, 1) 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

④ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 은 중심이 (3, 0) 이고

반지름의 길이가 1인 원이다.

원의 중심 (3, 0) 을 점 (2, 1) 에 대하여

대칭이동한 점을 (a , b) 라 하면

$$\frac{3+a}{2} = 2, \frac{0+b}{2} = 1$$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는

그대로이므로 구하는 원은 중심이 (1, 2) 이고

반지름의 길이가 1인 원이다.

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

28. 두 점 A(2, 0), B(0, 2) 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① $C(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 또는 $C(1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$

② $C(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$

③ $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

④ $C(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 0)$

⑤ $C(0, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C 를 (x, y) 라 놓자.

$$\overline{AB}^2 = (2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = 8$$

$$\overline{BC}^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\overline{CA}^2 = (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 에서}$$

$$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$x = y \text{ 이므로 } 2x^2 - 4x - 4 = 0, x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 꼭짓점 C 의 좌표는 $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

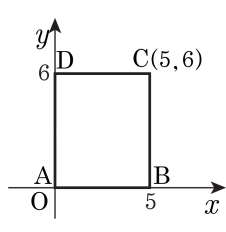
29. 세 점 A(0, 0), B(2, 4), C(6, 6)에 대해 △ABC의 외심의 좌표는?

- ① (6, 0)
- ② (6, -1)
- ③ (7, -1)
- ④ (7, 0)
- ⑤ (8, 0)

해설

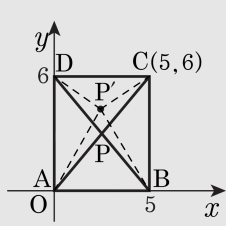
외심의 성질 : 삼각형의 세 점에서의 거리가 같다.
외심을 (x,y)라 하면
 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \dots \textcircled{1}$
 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-6)^2} \dots \textcircled{2}$
①, ②의 양변을 제곱하여 정리하면
 $x+2y=5, x+y=6$
두 식을 연립하여 풀면 $(x,y)=(7,-1)$
외심이 세 변의 수직이등분선의 교점이라는 것을 이용하여 구할 수도 있다.

30. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$ 로 이루어진 $\square ABCD$ 가 있다. $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P 의 좌표는?
- ① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ③ $(0, 3)$
- ④ $(5, 0)$ ⑤ $(0, 6)$

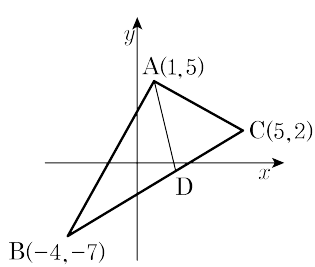


해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을 P 라 하고 임의의 점 P' 을 잡으면
 $\overline{P'A} + \overline{P'C} \geq \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}$
 $\overline{P'B} + \overline{P'D} \geq \overline{BD} = \overline{PB} + \overline{PD}$
 $\therefore \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D}$
 $\geq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$
 즉, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는
 점 P 는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 이다.



31. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(-4, -7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
 ③ $(2, -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

$$\therefore D\left(\frac{-20+65}{13+5}, \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

32. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

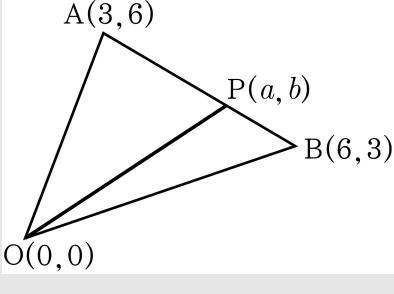
해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이려면 P 는 두 점 A, B 를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



33. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 의 두 교점과 점(0, 1) 을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (1, 0)

② $\left(\frac{9}{8}, 0\right)$

③ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

④ $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$

⑤ $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 6x) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①은 (0, 1) 을 지나므로 대입하면 $1 - 4 + k = 0$

$$\therefore k = 3 \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하여 정리하면

$$4x^2 + 4y^2 - 18x - 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{97}{16}$$

원의 중심은 $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

34. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(ab)^2 \quad \dots \quad \text{㉠}$$

산술기하 조건에 의해 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

즉, $a^2 + b^2 = 2ab$ 일 때 최소이다.

$$\text{㉠에 대입시키면, } 2ab = \frac{1}{4}(ab)^2$$

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 \text{의 최솟값은 } 2ab = 16$$

35. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > -2$

② $a \geq -1$

③ $-1 \leq a < 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-2 \leq a < 3$

해설

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = a + 2$$

중심이 (2, 1) 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.

$$x \text{ 축과 만나려면 } \sqrt{a+2} \geq 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y \text{ 축과 만나지 않으려면 } 0 < \sqrt{a+2} < 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 동시에 만족하므로

$$\therefore -1 \leq a < 2$$

36. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 밖의 한 점 $P(2, 3)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이는?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 을
표준형으로 고치면,
 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

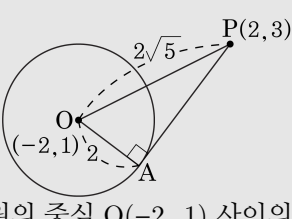
다음 그림에서 $\overline{PA}$ 가 원 O의 접선
이므로

$\angle OAP = 90^\circ$ 이다. 점 $P(2, 3)$ 과 원의 중심 $O(-2, 1)$ 사이의
거리는

$$\overline{OP} = \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

따라서 접선의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$



37. 점 (3, 1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을 $y = mx + n$ 이라 할 때, mn 의 값은?

① -4 ② -6 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

해설

점 (3, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면, $y = m(x-3)+1$
이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \text{에서}$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m = -\frac{1}{2}, 2$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y = 2x - 5$ ($\because m > 0$)

$$\therefore mn = -10$$

38. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,
 $(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$
 $8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$
m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, \quad (a - 7)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

해설

원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $a - 3 = \pm 4$
 $\therefore a = 7$ 또는 $a = -1$
그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$

39. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

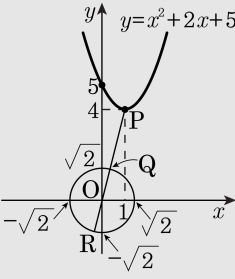
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP} - (\text{반지름의 길이})$ 이고, 최댓값은 $\overline{OP} + (\text{반지름의 길이})$ 가 된다.

따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{PQ}$ 이고,

최대 길이는 $\overline{PR}$ 이므로

$$|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$$



40. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

- ① $\frac{\pi}{2}$
- ② π
- ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면
$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$
$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$
이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로
$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면}$$
$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$
$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$
따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는
 $2\pi \doteq 2\pi$

41. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

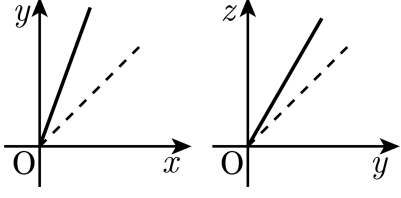
$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1+a+3}{3} = 1$, $\frac{6+b+4}{3} = 4$ 이므로

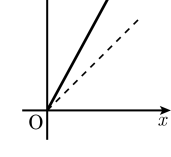
$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

42. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

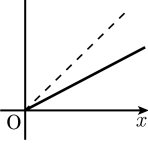


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

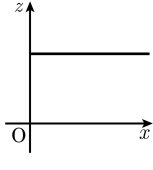
①



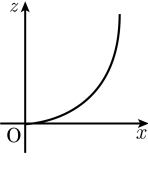
②



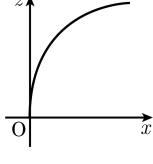
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$
 $\therefore z = b(ax) = abx \ (ab > 1)$
 따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

43. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

44. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

45. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

46. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 90° 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

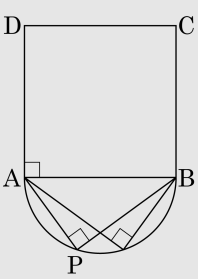
- ① πa
 ② $\sqrt{2}\pi a$
 ③ $2\pi a$
- ④ $2\sqrt{2}\pi a$
 ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 90° 되는 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$$



47. 두 점 A(-2, 2), B(2, 2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 (2, 1), (0, 3)을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A(-2, 2) B(2, 2) 의 중점은 원의 중심이므로,

$$\text{중점 } O = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (0, 2)$$

반지름의 길이 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 (0, a) 라고 하면

두 점 (2, 1), (0, 3) 과의 거리가 각각 같

으므로,

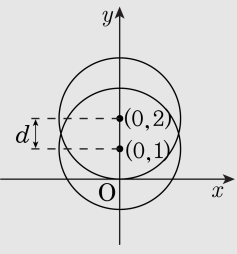
$$(0-2)^2 + (a-1)^2 = (0-0)^2 + (a-3)^2$$

$$\therefore a = 1$$

반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와

같으므로 $2 - 1 = 1$



48. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$
 $\therefore a^2 - 3a = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

49. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 4, (x - 5)^2 + y^2 = 25$$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\dots\dots \textcircled{㉢}$ 로 놓으면

원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉣}$$

또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉤}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉣ $\div$ ㉤을 하면

$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$$

$$\therefore b = -\frac{10}{7}a \text{ 또는 } b = \frac{10}{3}a$$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉤에서

$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$24a^2 + 49 = 0$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, ㉤에서

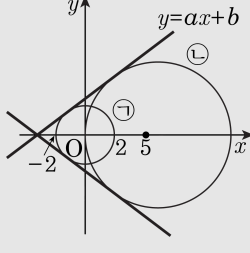
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$



50. 좌표평면에서 점 $P(1, 4)$ 를 다음 평행이동식 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$Q = (1 + m, 4 + n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{PQ}$ 의 기울기는 $y = 2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2}, \frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y = 2x$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \text{i) } \frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } \frac{8+n}{2} = m+2$$

$$\text{i) 과 ii) 를 연립하면, } m = \frac{8}{5}, n = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore m + n = \frac{4}{5}$$