1. 평면위의 한 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2,\ 5)$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+3,\ b+2)=(2,\ 5)$이므로 $a=-1,\ b=3$
따라서 $a+b=2$

2. 도형 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=5$

② $(x-2)^2+(y+2)^2=5$

③ $(x-3)^2+(y+3)^2=5$

④ $(x-3)^2+(y-3)^2=5$

⑤ $(x+3)^2+(y-3)^2=5$

해설

$x-2=x'\quad y+1=y'$

라 하고 주어진 식에 대입한다.

$\Rightarrow\quad (x'+2+1)^2+(y'-1-2)^2=5$

$\Rightarrow\quad (x'+3)^2+(y'-3)^2=5$

$\Rightarrow\quad (x+3)^2+(y-3)^2=5$

3. 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$　② $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2$
③ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$　④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$
⑤ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2 \cdots$ ①
위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}(x',\ y')$이라 하면

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases} \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2 + (y'-3)^2 = r^2$
점 $\mathrm{P}(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로
구하는 방정식은 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 이다.

4. 직선 $y = -3x + 2$을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

① (x 축) : $y = 3x - 2$
② (y 축) : $y = -3x - 2$
③ (원점) : $y = 3x + 2$
④ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
⑤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

① x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$
$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)
② y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)
③ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)
④ $y = x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow x = -3y + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)
⑤ $y = -x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

5. 도형 $y = 2x$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y = 2x$ ② $y = -2x$ ③ $y = \frac{1}{2}x$
④ $y = -\frac{1}{2}x$ ⑤ $y = 2x + 1$

해설

$y = x$ 대칭은 $x \to y$ 좌표로, $y \to x$를 대입한다.

6. 점 $(-1,2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1,2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1,-2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1,-2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1,2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

7. 점 $(-1,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 후 다시 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$에 의하여 이동시켰다. 그 후 다시 x축에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(-1,\ 2)$로 되돌아왔다. 이때 $a+b$의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

점 $(-1,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동

$\to \quad (1,-2)$

평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$에 의하여 이동

$\to \quad (1+a,\ -2+b)$

x축에 대하여 대칭이동

$\to \quad (1+a,\ 2-b) = (-1,\ 2)$

$\therefore\ a+b = -2+0 = -2$

8. 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 점 $(3,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $ax + by + 18 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 주어진 조건대로 대칭이동하면
$3(6 - x) - 2(2 - y) + 4 = 0$
$-3x + 2y + 18 = 0$
따라서, $a = -3$, $b = 2$
$\therefore\ a + b = -1$

9. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 7)$ 인 포물선을 얻을 수 있다. 이때, $b - a$ 의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$y - b = (x - a)^2 + 3$
$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$
이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로
$a = 3, b + 3 = 7$　　$\therefore b = 4$
$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$

10. 좌표평면 위에서 곡선 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 을 평행이동하여 $x^2+y^2=c$ 를 얻었다. 이때, 상수 c 의 값은?

① 9　② 16　③ 25　④ 20　⑤ 15

해설

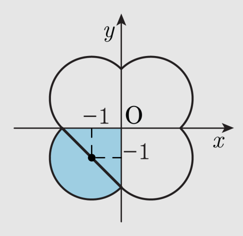
$x^2+y^2-6x+8y = (x-3)^2+(y-4)^2 = 5^2$
원을 평행이동시키면 중심의 좌표만 변하고
반지름은 그대로 이므로 $c=5^2=25$

11. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$ ② $2\pi+4$ ③ $2\pi+8$
④ $4\pi+8$ ⑤ $8\pi+8$

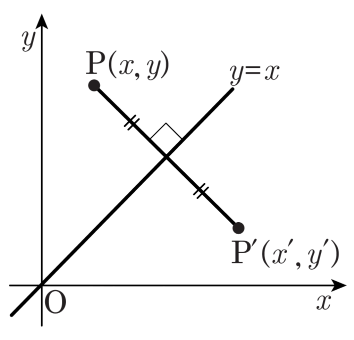
해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$
따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로
$4(\pi+2)=4\pi+8$

12. 다음은 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표를 구하는 과정이다. 이 때, (가) ~ (라) 에 알맞지 않은 것은?



점 $P(x, y)$ 를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라고 하면
선분 PP' 의 중점
$M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 은
직선 (가) 위에 있으므로
$\frac{y+y'}{2}$ =(나)⋯⋯㉠
또한, 직선 PP' 은 직선 $y = x$ 와 수직이므로
1×(다) = −1 ← (수직인 두 직선의 기울기의 곱이 −1)
이것을 정리하면
$x' + y'$ =(라) ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x' = y, y' = x$
따라서, 구하는 점 P' 의 좌표는 (마) 이다.

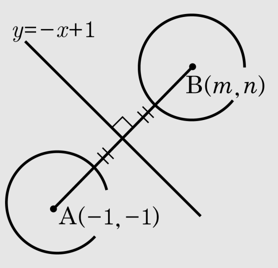
① (가) : $y = x$ ② (나) : $\frac{x+x'}{2}$ ③ (다) : $\frac{y'-y}{x'-x}$
④ (라) : $x + y$ ⑤ (마) : (x, y)

해설
구하는 점 P' 의 좌표는 (y, x) 이다.

13. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설



원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이 때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1,-1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m,n)$ 이라고 하면

선분 AB 는 직선 $y=-x+1$ 과 수직이므로

$\frac{n+1}{m+1}\cdot(-1)=-1$ 에서

$m=n$ ⋯⋯ ㉠

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\frac{n-1}{2}=-\frac{m-1}{2}+1$ 에서

$m+n=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2, n=2$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2,2)$ 이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

즉, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\therefore a=-4, b=-4, c=7$

$\therefore a+b+c=-1$

14. 좌표평면상의 두 점 P$(-2,\ 4)$, Q$(a,\ b)$는 직선 $y=2x+1$에 관하여 대칭일 때, $5a+5b$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

(i) $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이 $y=2x+1$

위의 점$\left(\dfrac{a-2}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$가 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{b+4}{2}=2\cdot\dfrac{a-2}{2}+1 \Rightarrow 2a-b=6 \cdots$ ㉠

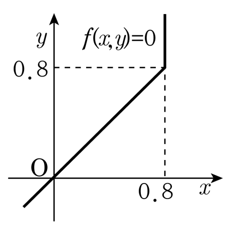
(ii) $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 $y=2x+1$이 수직 ($\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 기울기)$\times 2=-1$

$\Rightarrow \dfrac{b-4}{a+2}\times 2=-1 \Rightarrow a+2b=6 \cdots$ ㉡

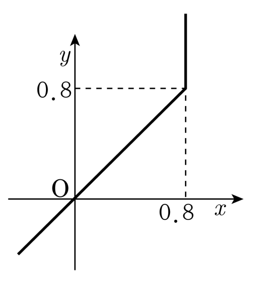
㉠, ㉡에서 $a=\dfrac{18}{5}$, $b=\dfrac{6}{5}$

$\therefore 5a+5b=18+6=24$

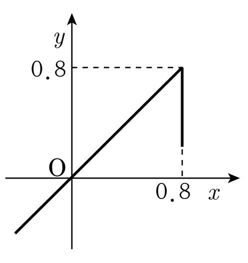
15. 방정식 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y,-x)=0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



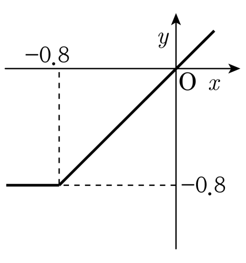
①



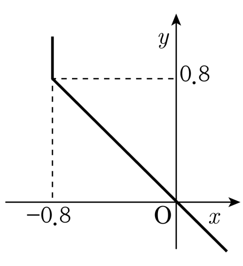
②



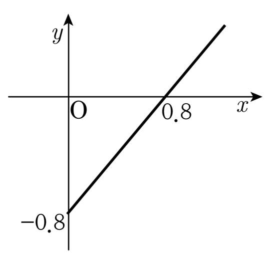
③



④



⑤



해설

$f(-y,-x)=0$ 은 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형을
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

16. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

> 갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
> 을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
> 병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y=f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y=-f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
> 정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병　　② 갑, 을, 정　　③ 갑, 병, 정
④ 을, 병, 정　　⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참
병 : $(x,y) \quad \rightarrow \quad (-x,-y)$: 원점 대칭
$\therefore \quad y=f(x) \quad \rightarrow \quad -y=f(-x)$: 거짓

17. 다음 중 원 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=2$

② $x^2+y^2=3$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=5$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 ①이다.

18. 직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2=1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a , b 에 대하여 $3a+4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$3(x-a)+4(y-b)=0$ 이므로
원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y-3a-4b=0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0,\ 0)$ 에서 직선
$3x+4y-3a-4b=0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.
$\therefore \dfrac{|3\times 0+4\times 0-3a-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$
$\therefore |-3a-4b|=5$
이 때, a , b 가 양수이므로
$3a+4b=5$ 이다.

19. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A\to B\to C\to D\to C\to B\to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A\to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y-1=0$ ③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$ ⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로
$A\to B\to C$, $C\to B\to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

20. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x - 4, y + 1)$ 에 의하여 옮긴 후 다시 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -5 ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$(0,\ 0) \xrightarrow{f} (-4,\ 1) \xrightarrow{y=-3\text{대칭}} (-4,\ -7)$

$\therefore$ 이동된 원의 방정식 $:(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 1$

$\Rightarrow\ a + b + r = -10$

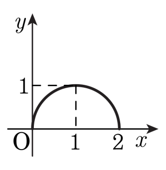
21. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m의 값들의 합을 구하면?

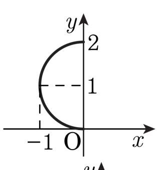
① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

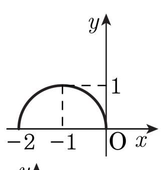
해설

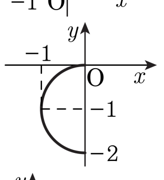
$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면
$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$9m^2+12m+4=4m^2+4$
$\therefore\ 5m^2+12m=0$
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

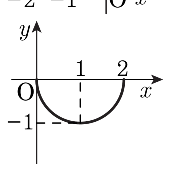
22. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

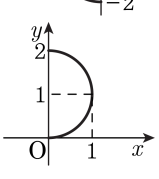


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

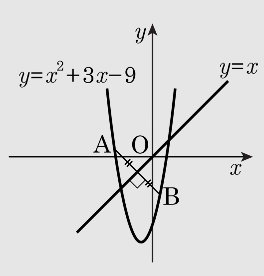
해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

23. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{3}$

해설



A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ b = a^2 + 3a - 9$ 가 성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a - b)\ (a + b + 4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a+5)(a-1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
$\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$