

1. 원점을 중심으로 하고, 점 $(3, -4)$ 를 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + 2y^2 = 41$ ② $2x^2 + y^2 = 34$ ③ $x^2 + y^2 = 25$
④ $x^2 + y^2 = 16$ ⑤ $x^2 + y^2 = 9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

① 이 점 $(3, -4)$ 를 지나므로

$$3^2 + (-4)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$$

이 때, ①은 $x^2 + y^2 = 25$

2. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$

② $(2, 4)$

③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$

⑤ $(4, -4)$

해설

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{중심은 } (-2, 3)$$

3. 지름의 양 끝점이 (3, 0), (5, 2)인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 이다. $a+b+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 (4, 1)이다.
(지름의 길이) = $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2+(y-1)^2=2$

4. 세 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots\dots \textcircled{\ast}$ 이라 하면
 $\textcircled{\ast}$ 는 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나므로
 $1 + 1 + A + B + C = 0, 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$
 $9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$
 $\therefore A = -5, B = -1, C = 4$
 $\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
 $\therefore A \times B \times C = 20$

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

i) $\textcircled{A}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} a^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 &= r^2 \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

ii) $\textcircled{A}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 &= r^2 \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{C} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{B} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

7. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

8. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1, (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 - k$
교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가
반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차
이상이 되어야 한다.

$$\Rightarrow \sqrt{25 - k} - 1 \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \leq \sqrt{25 - k} + 1$$

$$\Rightarrow 25 - k \leq 36, 25 - k \geq 16$$

$$\Rightarrow -11 \leq k \leq 9$$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

10. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

11. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

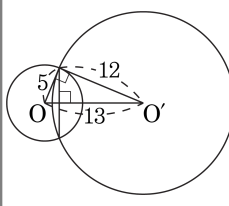
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



12. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

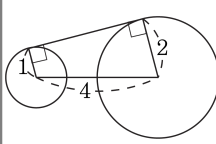
따라서 공통접선은 3 개이다.

13. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면
 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



14. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

15. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

16. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

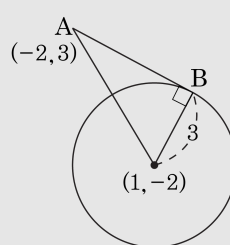
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



17. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

18. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$ ② $y = -x \pm 3$ ③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$$y = -x \pm 2\sqrt{1+1}$$

$$\therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

19. 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p - q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 을

표준형으로 고치면

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = 5a^2 - 20a + 25$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 20a + 25) = 5\pi(a - 2)^2 + 5\pi$$

따라서 $a = 2$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(-2, 4)$

$$\therefore p = -2, q = 4$$

$$\therefore p - q = -6$$

20. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $Q(x + y, x - y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

- ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$X = x + y$, $Y = x - y$ 로 놓고, x, y 에 관하여 연립하여 풀면
 $x = \frac{1}{2}(X + Y)$,
 $y = \frac{1}{2}(X - Y)$
이것을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면
 $X^2 + Y^2 = (\sqrt{2})^2$
따라서 구하는 넓이는 $\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

21. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

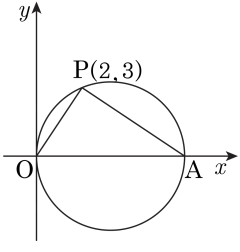
$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

22. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② $\frac{11}{2}$
- ③ $\frac{13}{2}$
- ④ $\frac{15}{2}$
- ⑤ $\frac{17}{2}$



해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
 $a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$
 $a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 90° 이므로 $\angle OPA = 90^\circ$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
 $\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1, 2a-4=9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

23. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

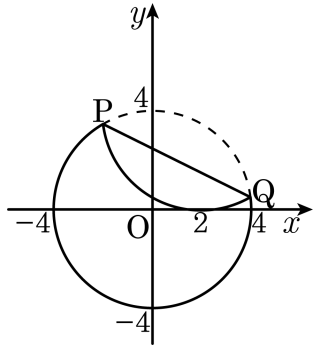
$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

24. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

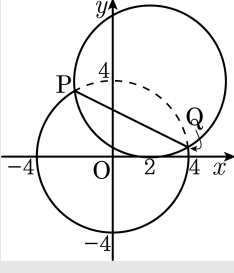


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$
 $\therefore x + 2y - 5 = 0$
 따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.