1. 원점을 중심으로 하고, 점 $(3,\ -4)$를 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+2y^2=41$　② $2x^2+y^2=34$　③ $x^2+y^2=25$

④ $x^2+y^2=16$　⑤ $x^2+y^2=9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$x^2+y^2=r^2 \cdots\cdots$ ㉠

㉠ 이 점 $(3,\ -4)$ 를 지나므로

$3^2+(-4)^2=r^2 \quad \therefore\ r^2=25$

이 때, ㉠은 $x^2+y^2=25$

2. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$ ⑤ $(4, -4)$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\Rightarrow$ 중심은 $(-2, 3)$

3. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 이다. $a+b+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$ 이다.
(지름의 길이) $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

4. 세 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0 \cdots\cdots$ ㉡이라 하면

㉡는 점 $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$, $4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,

$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$

$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$

$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$ ⋯⋯㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2$ ⋯⋯㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2$ ⋯⋯㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}\quad (\because\ r > 0)$

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$　　② $c^2 = b$　　③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$　　⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은

$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

7. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$ ② $2x - y = 0$ ③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$ ⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$

$\therefore\ x + 2y = 5$

8. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-5,0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x=-1$ ② $x=-2$ ③ $x=-3$

④ $x=-4$ ⑤ $x=-5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5\cdot x+0\cdot y=25$

$-5x=25$

$\therefore x=-5$

9. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow\quad x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$

교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가 반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차 이상이 되어야 한다.

$\Rightarrow\quad \sqrt{25-k}-1 \le \sqrt{3^2+4^2} \le \sqrt{25-k}+1$

$\Rightarrow\quad 25-k \le 36,\ 25-k \ge 16$

$\Rightarrow\quad -11 \le k \le 9$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

10. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$ ② $4x-3y+4=0$

③ $3x-3y+4=0$ ④ $x-y+4=0$

⑤ $2x-y+1=0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-\left(x^2+y^2-4y\right)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore\ x-y+4=0$

11. 두 원 O와 O′의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

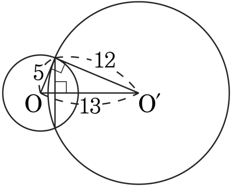
① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2}\times 5\times 12=\frac{1}{2}\times 13\times\frac{x}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{120}{13}$$



12. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

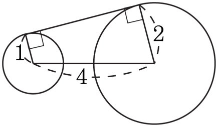
$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

13. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



14. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

15. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

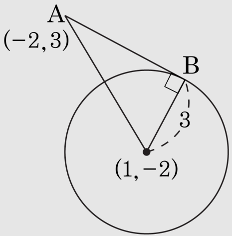
반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

16. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$

17. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

18. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-x\pm 2$ ② $y=-x\pm 3$ ③ $y=-x\pm 4$

④ $y=-x\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y=-x\pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$

19. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2,4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

20. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(x+y,\ x-y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$X=x+y$, $Y=x-y$ 로 놓고, $x,\ y$ 에 관하여 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(X+Y)$,

$y=\frac{1}{2}(X-Y)$

이것을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$X^2+Y^2=(\sqrt{2})^2$

따라서 구하는 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$

21. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

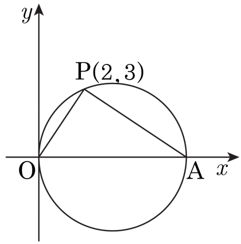
해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

22. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle OPA = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

23. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c$,d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

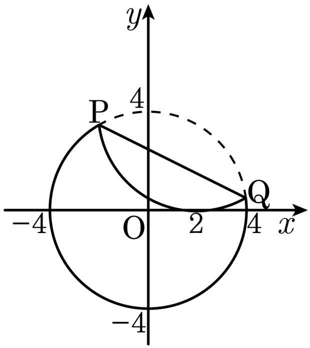
$$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$$

$$\therefore\ \ x=\pm 1,\ \ \pm\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$$

24. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

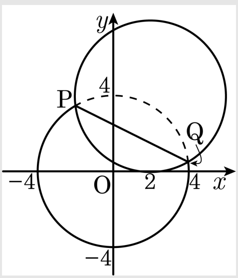


▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16//$



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.