1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4, \sum_{i=1}^{100} y_i = 6$일때, $\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k) = 3\sum_{k=1}^{100} x_k - 2\sum_{k=1}^{100} y_k$
$= 3\sum_{i=1}^{100} x_i - 2\sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$

2. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l) = \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=1}^{5} l = \sum_{k=1}^{5} k + 5l$

$\therefore$ (준 식) $= \sum_{l=1}^{10}(5l+15) = 5\sum_{l=1}^{10} l + 150$

$= 5 \times 55 + 150 = 425$

3. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7j}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{6} + 7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(385+385)$

$= 385$

4. 다음 수열의 합을 $\sum$기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

5. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

6. 두 등차수열 a_n, b_n에 대하여 $a_1 + b_1 = 5$, $a_{10} + b_{10} = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은?

① 75 ② 85 ③ 95 ④ 105 ⑤ 115

해설

$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \dfrac{10(b_1 + b_{10})}{2} = 5(a_1 + a_{10}) + 5(b_1 + b_{10})$

$= 5(a_1 + b_1) + 5(a_{10} + b_{10}) = 5 \times 5 + 5 \times 10 = 75$

7. 다음 등식이 성립하도록 하는 c의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100}k^2 - 4\sum_{k=11}^{100}k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100}(k^2-4k+4)$

$= \sum_{k=11}^{100} - 4\sum_{k=11}^{100}k + \sum_{k=11}^{100}4$

$\therefore\ c = \sum_{k=11}^{100}4 = 4+4+\cdots+4 = 4\times 90 = 360$

8. $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2)$를 n에 관한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{n(n+1)}{2}$　② $\dfrac{n(n-1)}{3}$

③ $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$　④ $\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$

⑤ $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

해설

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$= \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k)$

$= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3 \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)\left\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\right\}}{4}$

$= \dfrac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

따라서 이 식에서 n 대신 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$

9. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)=56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)$

$=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^2+\sum_{l=1}^{n} l\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\cdot 7\cdot 8$

$\therefore n=6$

10. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right) = 1008$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n} 12 \cdot \left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = 6\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= 6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$

즉, $2n(n+1)(n+2) = 1008$이므로

$n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

$\therefore\ n = 7$

11. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$1 \cdot 1 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 4 \cdot 7 \cdot 9,\ \cdots$

① 10050 ② 11000 ③ 11055
④ 12045 ⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$ 이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}(4k^3 - k) = 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 - \frac{10 \times 11}{2}$

$= 12100 - 55 = 12045$

12. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k-2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

13. 수열 $1\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

14. 수열 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$ 의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$　　② $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　　④ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+3)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+3)$

해설

$a_n = 1+2+\cdots+n$

$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$= \frac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{2\cdot 6}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

15. 1 에서 10 까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1 에서 10 까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$

$\therefore S = 1320$

$\therefore \frac{S}{10} = 132$

16. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19}$

$= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}$

$B = \sum_{k=1}^{10} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}$

$= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19}$

$= r\left\{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\right\} = r \cdot A$

따라서 $r = \frac{B}{A}$

17. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$

$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$

$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$

$= 440 - 30 - 15 = 395$

18. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20　② 22　③ 25　④ 27　⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 값을 구하여라.

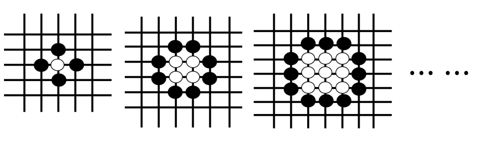
▶ 답 :

▷ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로
$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$
$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 각각 대입하여 변끼리 곱하면
$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$
$\frac{S_n}{S_1} = n$ 이므로 $S_n = nS_1 = na_1 = n$
$\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S_1 + S_2 + \cdots S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

20. 10 개의 바둑판에 그림과 같은 규칙으로 흰 돌과 돌을 놓을 때, 이 10 개의 바둑판에 놓인 돌의 개수의 총합은?



① 565　② 575　③ 585　④ 595　⑤ 605

해설

바둑판n의 흰 바둑돌 개수 : 1, 4, 9, $\cdots$

$\therefore\ n^2$

바둑판n의 검은 바둑돌 개수 : 4, 8, 12, $\cdots$

$\therefore\ 4n$

바둑판n의 바둑돌 개수는 $n^2 + 4n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k) &= \sum_{k=1}^{10}k^2 + 4\sum_{k=1}^{10}k \\ &= \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + 4\times\frac{10\cdot 11}{2} \\ &= 605\end{aligned}$$