

1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4, \sum_{i=1}^{100} y_i = 6$ 일때, $\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k) &= 3 \sum_{k=1}^{100} x_k - 2 \sum_{k=1}^{100} y_k \\ &= 3 \sum_{i=1}^{100} x_i - 2 \sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0\end{aligned}$$

2. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^5 (k+l) = \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l + 15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425 \end{aligned}$$

3. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

①

385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

4. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$$

5. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$

② $\log 50$

③ $\log 55$

④ $\log 60$

⑤ $\log 66$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right) \\ &= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66 \end{aligned}$$

6. 두 등차수열 a_n, b_n 에 대하여 $a_1 + b_1 = 5$, $a_{10} + b_{10} = 10$ 일 때,
 $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값은?

- ① 75 ② 85 ③ 95 ④ 105 ⑤ 115

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2} = 5(a_1 + a_{10}) + 5(b_1 + b_{10}) \\ &= 5(a_1 + b_1) + 5(a_{10} + b_{10}) = 5 \times 5 + 5 \times 10 = 75\end{aligned}$$

7. 다음 등식이 성립하도록 하는 c 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 &= \sum_{k=11}^{100} (k^2 - 4k + 4) \\ &= \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4 \\ \therefore c &= \sum_{k=11}^{100} 4 = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 90 = 360\end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2)$ 를 n 에 관한 식으로 나타내면?

① $\frac{n(n+1)}{2}$

② $\frac{n(n-1)}{3}$

③ $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

④ $\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$

⑤ $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \\
 &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1) \{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\}}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 이 식에서 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$$

9. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\therefore n = 6$$

10. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) \\ &= \sum_{l=1}^n 12 \cdot \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = 6 \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= 6 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2) \\ &\text{즉, } 2n(n+1)(n+2) = 1008 \text{ 이므로} \\ &n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \\ &\therefore n = 7 \end{aligned}$$

11. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$$1 \cdot 1 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, 4 \cdot 7 \cdot 9, \dots$$

① 10050

② 11000

③ 11055

④ 12045

⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$ 이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (4k^3 - k) &= 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 12100 - 55 = 12045\end{aligned}$$

12. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1155 - 110 \\ &= 1045 \end{aligned}$$

13. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

14. 수열 $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ 의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

④ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+3)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+3)$

해설

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 2(n+2)}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

15. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 이므로

1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) + 2S$$

$$2S = \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2640$$

$$\therefore S = 1320$$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

16. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r 을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

- ① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} \\ &= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19} \\ &= r \{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\} = r \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{B}{A}$$

17. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 (n=2, 3, 4, \dots) \\ n=1 \text{ 일 때, } a_1 &= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 } a_n &= 4n - 3 (n=1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2^n$ 을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{5-1} = 16$$

$$\therefore a_9 + a_{10} = 25$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} (\sum_{k=1}^n a_k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로

$$na_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k \text{ 에서 } n(S_{n+1} - S_n) = S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n} \text{ 의 양변의 } n \text{ 에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{ 을 각각 대입}$$

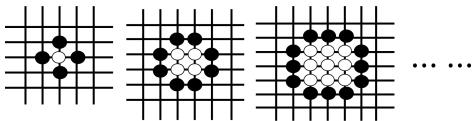
하여 변끼리 곱하면

$$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \dots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$\frac{S_n}{S_1} = n \text{ 이므로 } S_n = nS_1 = na_1 = n$$

$$\sum_{n=1}^{20} (\sum_{k=1}^n a_k) = S_1 + S_2 + \dots + S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

20. 10 개의 바둑판에 그림과 같은 규칙으로 흰 돌과 돌을 놓을 때, 이 10 개의 바둑판에 놓인 돌의 개수의 총합은?



① 565

② 575

③ 585

④ 595

⑤ 605

해설

바둑판 n 의 흰 바둑돌 개수 : 1, 4, 9, ...

$$\therefore n^2$$

바둑판 n 의 검은 바둑돌 개수 : 4, 8, 12, ...

$$\therefore 4n$$

바둑판 n 의 바둑돌 개수는 $n^2 + 4n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 4k) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 4 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 605 \end{aligned}$$