

1. 다음 중 다항식의 계산결과가 잘못된 것은?

① $(5x - y) + (3x - 2y) = 8x - 3y$

② $(5x^3 + x^2 - 6x + 7) - (2x^3 - 4x^2 - 1) = 3x^3 + 5x^2 - 6x + 8$

③ $(xy + xy^2 - x^2) - (3x^2 - xy)$
 $= 2xy + xy^2 - 4x^2$

④ $(x^2 + 1)(3x^2 - 2x - 1)$
 $= 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

⑤ $(x^3 - 3xy^2 - 2y^3) \div (x + y) = x^2 - xy - 2y^2$

해설

$$(x^2 + 1)(3x^2 - 2x - 1) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$

2. 다음 중 유한집합인 것을 모두 고른 것은?

- ☐㉠ 5의 배수의 집합

☐㉡ 5와 6 사이의 자연수

☐㉢ 짝수의 집합

☐㉤ 100보다 큰 3의 배수의 집합

☐㉥ 우리나라 중학생의 집합

☐㉦ 1보다 작은 자연수의 집합

- ☐① ㉠, ㉡, ㉢

☐② ㉢, ㉤, ㉥

☐③ ㉤, ㉥, ㉦

☐④ ㉠, ㉤, ㉥

☒⑤ ㉡, ㉥, ㉦

해설

- ☐㉠ {5, 10, 15, ...} 이므로 무한집합이다.

☐㉡ 5와 6 사이에는 자연수가 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.

☐㉢ {2, 4, 6, ...} 이므로 무한집합이다.

☐㉤ {102, 105, 108, 111, ...} 이므로 무한집합이다.

☐㉥ 중학생의 수는 한정되어 있으므로 유한집합이다.

☐㉦ 1보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.

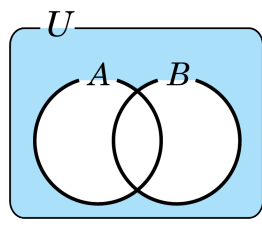
3. 집합 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합의 개수는?

- ① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

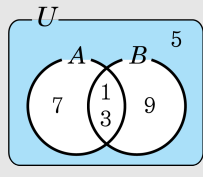
$\{a, b, c, d\}$ 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)

4. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 7\}, B = \{1, 3, 9\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{5\}$ ④ $\{1, 3\}$ ⑤ $\{5, 6\}$

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{5\}$ 이다.

5. 원소의 개수가 30인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 18$ 일 때, $n(A^c \cap B^c)$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$$n(A \cup B) = 18$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 30 - 18 = 12$$

6. 다음 중 다항식의 전개가 잘못된 것은?

① $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$

② $(a+2b-3c)^2 = a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ac$

③ $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3+8$

④ $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) = x^4-x^2y^2+y^4$

⑤ $(x-1)^2(x+1)^2 = x^4-2x^2+1$

해설

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \\ &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2 \\ &= x^4+x^2y^2+y^4 \end{aligned}$$

7. 다음 두 집합 사이의 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$ 를 나타냈을 경우 $A \subset B$ 인 개수를 구하여라.

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d, e\}$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$
- $\textcircled{\text{㉤}}$ $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\textcircled{\text{㉠}}$ $A \subset B$ $\textcircled{\text{㉡}}$ $A \not\subset B$ $\textcircled{\text{㉢}}$ $A \subset B$ $\textcircled{\text{㉤}}$ $B \subset A$

8. 두 집합 $A = \{0, 5, 6\}$, $B = \{x-2, x+4, 5\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값으로 옳은 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로 $x-2 = 0$, $x+4 = 6$
 $\therefore x = 2$

9. 두 집합 $A = \{3, 4, a + 1\}$, $B = \{a, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$A \cap B = \{4, 5\}$ 이므로 $A = \{3, 4, 5\}$

$\therefore a + 1 = 5$, $a = 4$

$B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ 이다.

원소의 합은 $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ 이다.

11. 다음 중 집합 $A - (B \cap C)$ 와 같은 집합은?

① $(A - B) - (A - C)$

② $(A - B) \cup (A - C)$

③ $(A - B) - C$

④ $(A \cap B) - C$

⑤ $A - (B \cup C)$

해설

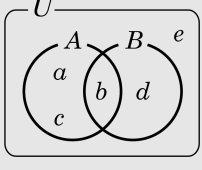
$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A - (B \cap C) \\ &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

12. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

- ① $\{a\}$ ② $\{a, c\}$ ③ $\{b\}$ ④ $\{e\}$ ⑤ $\{b, e\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{a, b, c, d\})^c = \{e\}$ 이다.



13. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
 $\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는 x 값을 대입한다.
 $x^2 + x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$
 $\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면
 $2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$
 $\therefore a = 3$

14. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

15. 집합 $A = \{2, 4, 8, 16, 22\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 4 의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 12 개 ② 24 개 ③ 28 개 ④ 34 개 ⑤ 36 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 4 의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 22 로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.
 $\therefore 32 - 4 = 28$ (개)

16. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ 일 때, 다음 중 $(B \cap A^c) - A$ 와 같은 집합은?

- ① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $\emptyset$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 $(B \cap A^c) - A = (B - A) - A = \{3, 5, 7\} - \{1, 2, 4, 8\} = \{3, 5, 7\}$ 이다.
따라서 B 와 같다.

17. 다음 명제 중에서 역이 참인 명제는?

- ① x, y 가 유리수이면 $x + y$ 도 유리수이다.
- ② $x = y$ 이면 $xm = ym$ 이다.
- ③ 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 > 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.
- ④ $x = 2$ 이면 $x^2 = 4$ 이다.
- ⑤ 6의 배수는 3의 배수이다.

해설

- ① $x + y$ 가 유리수 $\rightarrow x, y$ 가 유리수 (거짓)
반례) $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ 라 하면 $x + y = 2$ (유리수)
- ② $xm = ym \rightarrow x = y$ (거짓)
반례) $x = 1, y = 2, m = 0, xm = ym = 0$
- ③ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0 \rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (참)
- ④ $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ (거짓)
 $x^2 = 4$ 이면 $x = \pm 2$ 이다.
- ⑤ 3의 배수 $\rightarrow$ 6의 배수 (거짓)
반례) 9는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

18. 두 실수 x, y 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

$$x + y < 8 \text{이면 } x < -2 \text{ 또는 } y < k$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$ 이고 $y \geq k$ 이면 $x + y \geq 8$
 $x \geq -2, y \geq k$ 에서 $x + y \geq k - 2$ 이므로
 $k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$
따라서 k 의 최솟값은 10이다.

19. 「 a, b 가 정수일 때, ab 가 짝수이면 a 또는 b 는 짝수이다.」라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다.

주어진 명제의 대우를 쓰면「 a, b 가 정수일 때, a, b 가 모두 홀수이면 ab 도 홀수이다.」와 같다. 여기서 a, b 를 $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$ (단, k, l 은 정수)로 놓으면 $ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$ k, l 은 정수이므로 $2kl + k + l$ 도 (㉠)이다. 그러므로 ab 는 (㉡)이다.
따라서, 주어진 명제의 대우가 (㉢)이므로 주어진 명제도 (㉢)이다.

이 때, ()안에 알맞은 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 순서대로 바르게 나타낸 것은?

- ① 짝수, 정수, 참

② 홀수, 홀수, 거짓

③ 정수, 홀수, 참

④ 홀수, 짝수, 거짓

⑤ 정수, 짝수, 참

해설

k, l 이 정수일 때, $2kl + k + l$ 도 정수이다.
따라서, $ab = 2(2kl + k + l) + 1$ 은 홀수가 된다.
대우가 참이면 주어진 명제는 항상 참이다.

20. $a \leq x \leq 6$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 필요조건이고, $b \leq x \leq 4$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\{x|2 \leq x \leq 5\} \subset \{x|a \leq x \leq 6\}$$

$$\therefore a \leq 2$$

$$\{x|b \leq x \leq 4\} \subset \{x|2 \leq x \leq 5\}$$

$$\therefore 2 \leq b$$

a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 2

$$\therefore 2 + 2 = 4$$

21. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$$\begin{aligned} & (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2 \\ &= 2(|xy| + xy) \geq 0 \\ &\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2 \\ &\text{그런데 } |x| + |y| \geq 0, |x - y| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|x| + |y| \geq |x - y| \text{ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

① $xy > 0$

② $xy < 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy \leq 0$

⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
 $|xy| \geq 0$ 이므로
 $|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

22. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.

㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때, $4 < 9 \quad \therefore$ 거짓
- ㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq xy$
 $\therefore$ 참
- ㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 $x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$
 $\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$
 $\therefore$ 참

23. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $([나])$ 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$
- ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
- ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
- ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

24. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

25. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\}(1 + 4 + 9)$
 $\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
 $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$
 $\therefore 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
($\because x > 0, y > 0, z > 0$)
 $\therefore \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은
 $2\sqrt{35}$