

1. 8의 약수의 집합을 A , 5 이하의 홀수의 집합을 B 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $3 \in A$ ② $4 \notin A$ ③ $8 \in A$ ④ $3 \notin B$ ⑤ $5 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 4, 8이고 집합 B 의 원소는 1, 3, 5이므로 $8 \in A$, $5 \in B$ 이다.

2. 다음 중 옳은 것은?

24 의 약수의 모임 : A

6 의 배수의 모임 : B

100 미만 홀수의 모임 : C

10 이하의 소수 : D

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cap D = \{3, 5\}$

③ $B \cap C = \emptyset$

④ $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 24\}$

⑤ $6 \in B \cap D$

해설

A 는 24 의 약수의 모임이므로

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

B 는 6 의 배수의 모임이므로

$$B = \{6, 12, 18, 24, \dots\},$$

C 는 100 미만 홀수의 모임이므로

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 99\},$$

D 는 10 이하의 소수이므로 $D = \{2, 3, 5, 7\}$ 이다.

① $A \cap B = \{6, 12, 24\}$

② $A \cap D = \{2, 3\}$

④ $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 24\}$

⑤ $B \cap D = \emptyset$ 이므로 6 은 $B \cap D$ 에 속하지 않는다.

3. 함수 $y = \frac{x}{x+2}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

함수 $y = \frac{x}{x+2}$ 의 정의역이 $x \neq a$ 인 모든 실수이고

치역이 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x = a$, $y = b$ 는 점근선이다.

따라서 $y = \frac{(x+2)-2}{x+2} = \frac{-2}{x+2} + 1$ 에서

$a = -2$, $b = 1$ 이므로

$\therefore a + b = -2 + 1 = -1$

4. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서 점근선은}$$

$$x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

5. 다음중 함수 $y = -\sqrt{-2x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면

② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면

⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y = -\sqrt{-2(x-1)}+1$ 의 그래프는

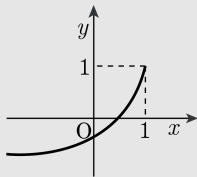
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한

다음 x 축의 방향으로 1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는

제 2 사분면을 지나지 않는다.



6. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

①

12

② 14

③ 16

④ 18

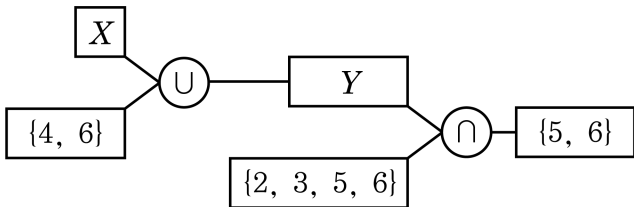
⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수하려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.

따라서, 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

7. 두 집합 A, B 의 교집합과 합집합을 다음 그림과 같이 나타내기로 한다.
이때, 만족하는 집합 X 로 가능한 것은?



① $\{2, 6\}$

② $\{2, 5, 6\}$

③ $\{4, 6, 7\}$

④ $\{1, 5, 6, 8\}$

⑤ $\{2, 3, 5, 6\}$

해설

$Y \cap \{2, 3, 5, 6\} = \{5, 6\}$ 이므로 $\{5, 6\} \subset Y$, $5 \in Y$, $6 \in Y$, $2 \notin Y$, $3 \notin Y$ 이다.

그리고 $X \cup \{4, 6\} = Y$ 이므로 $\{4, 6\} \subset Y$, $5 \in X$, $2 \notin X$, $3 \notin X$ 이어야 한다.

8. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \end{aligned}$$

...

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

9. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$$

$$f^{-1}(5) = k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$$

$$f^{-1}(-1) = l \text{ 로 놓으면}$$

$$f(l) = -2l + 3 = -1$$

$$\therefore l = 2$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(-1) = l = 2$$

10. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = 1-x$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$ 이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = 1-x = 10 \quad x = -9$$

11. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f \circ g)(x) = h(x)$ 라 하자.

$$h(x) = f(g(x)) = 2(x + 2) - 1 = 2x + 3$$

$h(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x = 2y + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore h^{-1}(-2) = -\frac{5}{2}$$

12. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

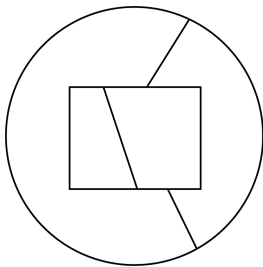
▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ &= 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

13. 다음그림과 같은 도형에 A, B, C, D 네 가지 색깔을 칠하려고 한다. 같은 색은 두 번 이상 칠해도 되지만 서로 이웃한 면에는 다른 색을 칠해야 한다고 할 때, 가능한 방법의 수는?



① 36

② 48

③ 60

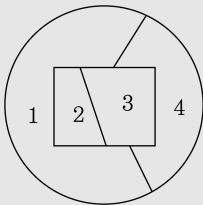
④ 72

⑤ 84

해설

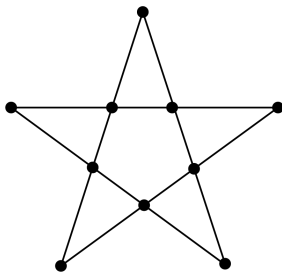
다음그림과 같이 나누어진 영역을 1, 2, 3, 4 라고 하면 각 영역에 칠할 수 있는 색의 경우의 수는

1	2	3	4
↓	↓	↓	↓
4가지	3가지	2가지	2가지



$$\therefore 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

14. 오른쪽 그림처럼 별 모양 위에 10 개의 점이 있다. 이 점들을 이어 만들 수 있는 직선의 개수를 구하면?



① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

직선의 개수는 10개 점 중에서 2개를 선택하면 하나의 직선이 결정된다.

그러나 이때, 일직선 위에 있는 2점을 선택하는 경우는 중복되는 경우이므로 빼주어야 한다. 또 주의할 것은 이렇게 중복되는 경우를 제외하다보면 각 별 모양을 이루는 5개의 직선을 전부 제외하므로 5를 더해주면 된다.

$${}_{10}C_2 - 4C_2 \times 5 + 5 = 20$$

15. 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$

㉡ $\phi \subset \{\emptyset\}$

㉢ $4 \subset \{1, 2\}$

㉣ $0 \subset \{0\}$

㉤ $0 \in \emptyset$

㉥ $0 \notin \emptyset$

① ㉡, ㉥

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉤, ㉥

해설

㉠ $n(\{0\}) = 1$

㉢ $4 \notin \{1, 2\}$

㉣ $0 \in \{0\}$

㉤ $0 \notin \emptyset$

16. 임의의 집합 X 에 대하여 집합 A, B 가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$ 를 만족할 때, 다음 중 집합 A, B 의 관계로 옳은 것은?

① $A = B$

② $A \subset B^c$

③ $A \cup B = U$

④ $A = \emptyset$

⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

집합 X 가 임의의 집합이므로 $X = \emptyset$ 일 때와 $X = U$ (U 는 전체 집합)일 때를 생각해 본다.

i) $X = \emptyset$ 일 때, $A \cap (B \cup \emptyset) = A \cap B$,

$A \cup (B \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$ 이므로 $A \cap B = A$

$\therefore A \subset B$

ii) $X = U$ 일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$,

$A \cup (B \cap U) = A \cup B$ 이므로 $A = A \cup B$

$\therefore B \subset A$

i), ii)에서 $A = B$

또, 역으로 $A = B$ 이면 주어진 식을 만족한다.

17. 전체 집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},$$

$$A = \{1, 3, 7, 11\}, B = \{7, 13\}$$

$$\text{㉡ } A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$$

$$\text{㉢ } A^c \cap B = B - A = \{13\}$$

$$\text{㉣ } A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$$

$$\text{㉤ } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$$

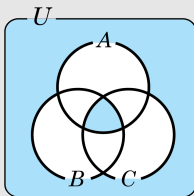
18. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$,
 $C = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ 에 대하여 $A\Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A\Delta B) \cap (A\Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 5$$

$$\therefore n((A\Delta B) \cap (A\Delta C)) = 1 + 5 = 6$$

19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap X = B \cap X$ 를 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는?

① 2개

② 4개

③ 8개

④ 16개

⑤ 32개

해설

$1 \in X$ 이면 $1 \in (A \cap X)$, $1 \notin (B \cap X)$, $5 \in X$ 이면 $5 \notin (A \cap X)$, $5 \in (B \cap X)$ 이므로 $A \cap X \neq B \cap X$ 이다. 따라서 U 의 원소 중 1과 5는 집합 X 의 원소가 될 수 없고, 나머지 다른 원소들은 X 의 원소가 되거나 되지 않아도 주어진 조건은 성립한다. 즉, 집합 X 는 1과 5를 포함하지 않는 U 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore X$ 의 개수는 $2^4 = 16(\text{개})$ 이다.

20. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

- 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$
- 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립한다.

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

- (i) $f(0) = 2$
- (ii) $f(-x) = -f(x)$
- (iii) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$
- (iv) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2$
 $= f(x+y)f(x-y) + 4$

① i , ii

② i , ii , iii

③ i , iii , iv

④ ii , iii , iv

⑤ i , ii , iii , iv

해설

(i) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.

정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$

$f(0)(f(0) - 2) = 0$ 이므로

$\therefore f(0) = 2$ ($\because f(x) \neq 0$)

(ii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서

$x = 0, y = x$ 를 대입하면

$f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.

$2f(x) = f(x) + f(-x)$ ($\because f(0) = 2$)

$\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ii 는 옳지 않다.

(iii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면

$f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.

$f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$

$\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ ($\because f(0) = 2$)

(iv) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서

$x = x+y, y = x-y$ 를 대입하면

$f(x+y)f(x-y) = f((x+y) + (x-y)) + f((x+y) - (x-y))$

$f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.

$f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x), f(2y)$ 에 적용하면

$f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.

$\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$