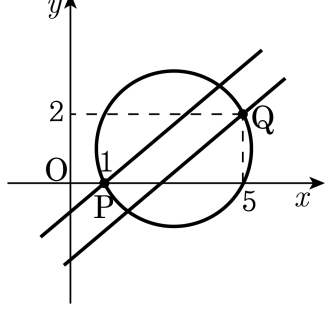


1. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$ 의 중점 C(3, 1)이므로,
 $r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5$ 이다.

2. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 연립방정식은
 $26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 연립방정식을 풀면
 $A = -2$, $B = 0$, $C = -24 \cdots \textcircled{5}$

3. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right)$, 즉 (-2, 6)

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 (-2, 6) 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

4. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$(-a) \cdot \frac{b}{3} = -1, \quad \therefore ab = 3 \cdots \textcircled{1}$$

l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.

$$-a = -b - 2, \quad \therefore a - b = 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 이용하면

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4 + 6 = 10$$

5. 두 점 $A(a, 3)$, $B(4, 5)$ 를 잇는 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식이 $y = -x + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 7

② 9

③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

i) 수직이등분선의 기울기는 선분 $\overline{AB}$ 의 기울기에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{5-3}{4-a} \times -1 = -1 \quad \therefore a = 2$$

ii) $\overline{AB}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{3+5}{2} = -\frac{4+2}{2} + b \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = 9$$

6. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

7. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

⇒ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$

∴ $k = -2$ ($\because k < 0$)

8. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

9. 두 점 A(-1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P(a , 0)이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$
 $(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2, 8a = 24$
 $\therefore a = 3$
Q(0, b)이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$
 $1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$
 $\therefore 4b = 24$
 $\therefore b = 6$ P(3, 0), Q(0, 6)
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

10. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

- ① (-3, -7)
- ② (-2, -5)
- ③ (3, 5)
- ④ (2, 3)
- ⑤ (3, 2)

해설

직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$
 $12a - 8b = 20$
 $\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$
또, 점 P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
 $b = 2a - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$
①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
A(-2, 1), B(4, -3)의 수직이등분선 위에 있다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4} = -\frac{2}{3}$ 이므로
수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, A(-2, 1), B(4, -3)의 중점 (1, -1)
를 지나므로
 $\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \cdots \textcircled{1}$
구하는 점 P는 $y = 2x - 1$ 과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x = -3, y = -7$
 $\therefore P(-3, -7)$

11. 세 도시 A, B, C가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?
- ① 외심 ② 내심 ③ 수심
- ④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

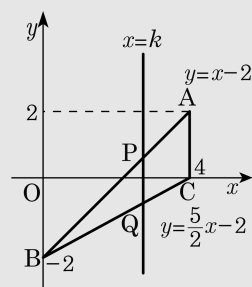
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$
송전소의 위치를 $D(x, y)$, 비용을 P 라고 하면
$$P = k\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\}$$
$$= k\left\{3\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2 - \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3} + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right\}$$
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ 일 때}$$

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

12. 세 점 A (4, 2) , B (0, -2), C (4, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x = k$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

- ① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x = k$ 와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P ($k, k - 2$), Q ($k, \frac{1}{2}k - 2$)이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ (k - 2) - \left(\frac{1}{2}k - 2 \right) \right\} \times k = 2, \quad k^2 = 8$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 4)$$

13. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$3x + y + 2 = 0, \ x + 3y + k = 0, \ 2x - y + 3 = 0$

- ① $k \neq -2$

② $k \neq -3$

③ $k \neq -4$
- ④ $k \neq -7$

⑤ $k \neq -11$

해설

$3x + y + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$

$x + 3y + k = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 일 때,

$2x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$

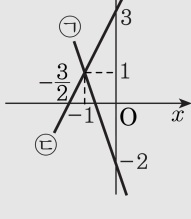
다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0, \therefore k \neq -2$



14. 점 (a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx - ay = 1$ 이 항상 지나는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

(a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직이므로

$$3a + 2b = 6$$

$$\therefore b = 3 - \frac{3}{2}a \cdots \text{㉠}$$

㉠을 $2bx - ay = 1$ 에 대입하면

$$2\left(3 - \frac{3}{2}a\right)x - ay = 1$$

$$(6 - 3a)x - ay = 1$$

$$(6x - 1) - (3x + y)a = 0$$

$$\therefore 6x - 1 = 0, 3x + y = 0$$

$$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

15. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

16. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
 $\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}
 & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\
 & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\
 & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\
 & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\
 &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\
 &\therefore r = 16
 \end{aligned}$$

17. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 90° 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

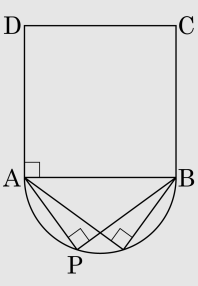
- ① πa
- ② $\sqrt{2}\pi a$
- ③ $2\pi a$
- ④ $2\sqrt{2}\pi a$
- ⑤ $4\pi a$

해설

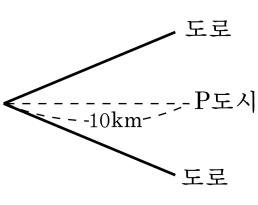
두 점 A, B 를 바라보는 각이 90° 되는 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$$



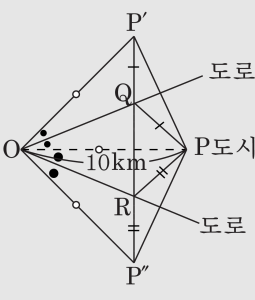
18. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



- ☒ ① $10\sqrt{2}$ km
 ☐ ② $12\sqrt{2}$ km
 ☐ ③ $14\sqrt{2}$ km
☐ ④ $16\sqrt{2}$ km
 ☐ ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''} \geq \overline{P'P''}$
 두 길의 교점을 O라 하면 $\overline{PO} = \overline{P'O} = \overline{P''O} = 10$ 이고
 두 도로가 이루는 각이 45° 이므로 $\angle P'OP'' = 90^\circ$
 따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$ km이다.



19. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점 M의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는 (a, b)라 한다. 이 때, a + b의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

B의 좌표를 (b_1, b_2) , C의 좌표를 (c_1, c_2) 라고 하면

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가

$\left(\frac{b_1+5}{2}, \frac{b_2+4}{2}\right)$ 이므로

$\frac{b_1+5}{2} = -1, \frac{b_2+4}{2} = 3$ 이다.

따라서 $b_1 = -7, b_2 = 2$

즉 B(-7, 2)

$\overline{CM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이

$\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

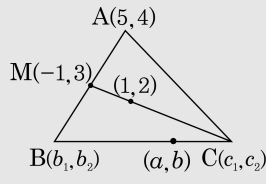
$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times c_1}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times c_2}{2+1}\right) = (1, 2)$

$\left(\frac{c_1-2}{3}, \frac{6+c_2}{3}\right) = (1, 2)$ 에서 $c_1 = 5, c_2 = 0$

$\overline{BC}$ 의 2 : 1로 내분점을 계산하면,

$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-7)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a + b = \frac{5}{3}$ 가 된다.



20. 좌표평면 위에서 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - ky + 5 = 0$ 이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k 의 값을 구하면? (단, $k < 5$)

- ① -2
- ② -1
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

x 에 관해서 정리하면, $x^2 + 2(y - 2)x + 2y^2 - ky - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로
 $D/4 = (y - 2)^2 - (2y^2 - ky + 5)$
 $= -y^2 + (k - 4)y - 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.
 $\therefore D = (k - 4)^2 - 4 = 0$ 에서 $k = 2$

21. 점 $(4, 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 접점을 A, B 라 할 때 직선 AB 의 방정식을 구하면?

- ① $4x + y = 1$
- ② $2x + y = 1$
- ③ $4x + 2y = 1$
- ④ $2x - y = 1$
- ⑤ $4x - y = 1$

해설

$\overline{AB}$ 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 중심이 $P(4, 2)$ 이고 반지름이 $\overline{PA}$ 인 원의 공통현이다. 다음 그림에서 $\overline{PA} = \sqrt{19}$ 이므로

원 P 의 식은 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 19$

$x^2 + y^2 = 1 \cdots ①$

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 19 \cdots ②$

공통현 $\overline{AB}$ 의 식은 ① - ② 하면

$8x + 4y = 2, \therefore 4x + 2y = 1$

해설

점 $P(4, 2)$ 에서 원의 중심 O 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또한 직선 $\overline{AB}$ 는 $\overline{OP}$ 에 수직이므로 직선 $\overline{AB}$ 의 기울기는 -2 이다.

따라서 직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $y = -2x + b$ 라 하고, A 의 좌표를 (m, n) 이라 하면

$n = -2m + b \rightarrow n + 2m = b \cdots ①$

또한, 접선의 방정식은 $mx + ny = 1$ 이고 $(4, 2)$ 를 지나므로

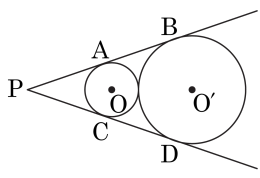
$4m + 2n = 1 \cdots ②$

①, ②에서 $b = \frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore \overline{AB}$ 의 직선의 방정식은

$y = -2x + \frac{1}{2} \rightarrow 4x + 2y = 1$

22. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O'의 공통외접선의 교점을 P, 접점을 A, B, C, D라고 하자. $\overline{PA} = \overline{AB} = 4\text{ cm}$ 일 때, 원 O의 넓이를 구하면?



- ① $\pi\text{ cm}^2$ ② $2\pi\text{ cm}^2$ ③ $3\pi\text{ cm}^2$
 ④ $4\pi\text{ cm}^2$ ⑤ $5\pi\text{ cm}^2$

해설

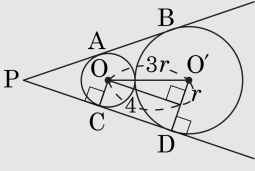
$\triangle POA$ 와 $\triangle PO'B$ 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.

$\therefore \overline{OA} = r$ 이라 하면, $\overline{O'B} = 2r$

다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$

$\Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 원 O의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$



23. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

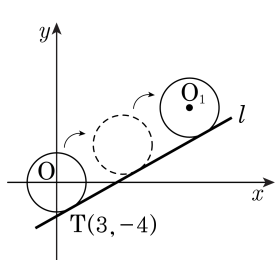
- ① $2a-3b-7=0$
- ② $2a-3b+7=0$
- ③ $a^2+b^2=3$
- ④ $a^2+b^2=4$
- ⑤ $a^2+b^2=5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4, (x-2)^2+(y-2)^2=9$
문제의 조건에서
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $(\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$
 $\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$

원의 중심 $C_1 = (4, -1), C_2 = (2, 2)$,
반지름 $r_1 = 2, r_2 = 3$
 $\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$
 $\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

24. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$$\therefore \left(\frac{b}{a} \text{ 직선 } OO_1 \text{ 의 기울기} \right)$$

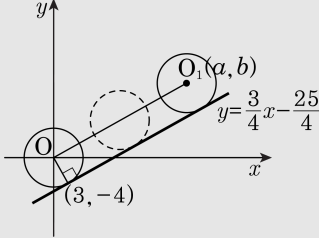
$$= (\text{직선 } l \text{ 의 기울기})$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\text{직선 } l \text{ 의 방정식은 } y - (-4) =$$

$$\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$



25. 두 점 A(2, 6), B(5, 2) 가 있다. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직일 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 한다. $M + m$ 의 값은?

- ① 24
- ② 26
- ③ 28
- ④ 30
- ⑤ 32

해설

$\triangle ABP$ 의 넓이는 다음 그림과 같이 P 가 I 일 때 최댓값, II 일 때 최솟값을 가진다.

$\overline{AB}$ 의 방정식이 $y = \frac{2-6}{5-2}(x-2) + 6$
 $\Rightarrow 4x + 3y - 26 = 0$

$\therefore \triangle ABP_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2)$
 $= \frac{1}{2} \times 5 \times (\frac{26}{5} - 2)$

$\triangle ABP_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2)$
 $= \frac{1}{2} \times 5 \times (\frac{26}{5} + 2)$

$\Rightarrow M + m = 26$