1. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a > b,\ b > c,\ c > d$이면 $a > d$
㉡ $a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
㉢ $a > b > 0,\ c > d > 0$이면 $ac > bd$
㉣ $ac > bc$이면 $a > b$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $a > b,\ b > c$이면 $a > c$
$a > c,\ c > d$이면 $a > d$ (참)
㉡ $a > b > 0$이므로 $a - b > 0,\ ab > 0$이다.
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0 \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$(참)
㉢ $c > d$이고 $a > 0$이므로 $ac > ad$
$a > b$이고 $d > 0$이므로 $ad > bd$
따라서 $ac > bd$(참)
㉣ $c < 0$일 때 $ac > bc$이면 $a < b$이다. (거짓)

2. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3} < \dfrac{-x-6}{4} \\ 2(3-x)+8 \geq 5x-7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -2$

해설

(i) $\dfrac{2x+1}{3} < \dfrac{-x-6}{4}$ 에서 $x < -2$

(ii) $2(3-x)+8 \geq 5x-7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore\ x < -2$

3. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x-3}{4}+2>\frac{1}{2} \\ 0.15x-0.5 \geq 0.4x-0.05a \end{cases}$ 에 대하여 해가 없기 위한 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \leq -5$

해설

$\frac{x-3}{4}+2>\frac{1}{2}$ (양변에 4 를 곱한다.)

$x-3+8>2$

$\therefore\ x>-3$

$0.15x-0.5 \geq 0.4x-0.05a$ (양변에 100 을 곱한다.)

$15x-50 \geq 40x-5a$

$-25x \geq -5a+50$

$x \leq \frac{5a-50}{25}$

$\therefore\ x \leq \frac{a}{5}-2$

해가 없으려면

$\frac{a}{5}-2 \leq -3$

$\frac{a}{5} \leq -1$

$\therefore\ a \leq -5$

4. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 자연수를 $x-2,\ x,\ x+2$로 각각 두면

$45 < (x-2) + x + (x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\Rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases}$

$\therefore\ x = 16, 17, 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15, 17, 19 이다.

5. 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1| > |x-2|$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > \frac{3}{2}$

해설

i) $x < 1$일 때,
$-(x-1) > -(x-2)$에서 $1 > 2$이므로 모순

ii) $1 \le x < 2$일 때,
$(x-1) > -(x-2)$에서
$2x > 3,\ x > \frac{3}{2}$
조건에서 $1 \le x < 2$이므로 $\frac{3}{2} < x < 2 \cdots$ ㉠

iii) $x \ge 2$일 때, $(x-1) > (x-2)$에서 $1 < 2$이므로 성립
$\therefore\ x \ge 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x > \frac{3}{2}$

6. 부등식 $(|x|-1)(|x|-3)<0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$(|x|-1)(|x|-3)<0$
$1<|x|<3$에서 구간을 나누면
(i) $x \geq 0$일 때, $1<x<3$, 정수 : 2
(ii) $x<0$일 때, $1<-x<3$,
$-3<x<-1$ 정수 : -2
$\therefore$ 정수의 개수 : 2개

7. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은
$D/4 = a^2-2a-3 = (a+1)(a-3) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
a의 최솟값은 -1

8. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 일 때 부등식 $cx^2-2bx-a<0$ 의 해는?

① $1<x<2$　　② $2<x<4$　　③ $3<x<5$

④ 모든 실수　　⑤ 해는 없다

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가

$-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이므로 $a<0$

해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$\left\{x-(-1-\sqrt{5})\right\}\left\{x-(-1+\sqrt{5})\right\}<0$

$x^2+2x-4<0$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2+2ax-4a>0$

$\therefore b=2a, c=-4a\cdots$㈎

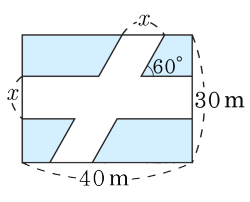
㈎를 $cx^2-2bx-a<0$ 에 대입하면

$-4ax^2-4ax-a<0$

$4x^2+4x+1<0, (2x+1)^2<0$

$\therefore$ 해는 없다.

9. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 60°로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 600 m² 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

$(x-10)(x-60) \geq 0$에서 $x \leq 10$ 또는

$x \geq 60\ (0 < x < 30)$이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는

$0 < x \leq 10$ 이므로 10 m이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - 4px + 5 - p$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 p 의 범위가 $p < \alpha,\ p > \beta$ 일 때 $\alpha + \beta$ 의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

$y = x^2 - 4px + 5 - p$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면
판별식 D 가 $D > 0$ 이다.

$\frac{D}{4} = (-2p)^2 - 5 + p > 0$

$4p^2 + p - 5 > 0$

$(p-1)(4p+5) > 0$

$\therefore\ p < -\frac{5}{4}, p > 1$

따라서 $\alpha = -\frac{5}{4}, \beta = 1$ 이므로

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{1}{4}$

11. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$　　② $1 \le k \le 5$　　③ $k \le -1, k \le 5$

④ $k < 1, k > 5$　　⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

$\therefore\ 1 < k < 5$

12. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

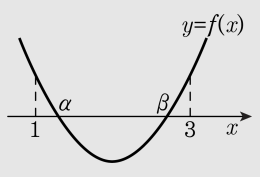
13. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

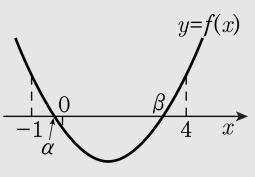
14. 이차방정식 $x^2-4kx+k^2-1=0$의 해를 α,β라 할 때, $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1\le k<1$　　② $-1<k<1$　　③ $-1<k<5$

④ $0<k<1$　　⑤ $0<k<5$

해설

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 근 α,β 가
$-1<\alpha<0<\beta<4$ 를 만족시키므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$ 에서 $k^2+4k>0$
　　$\therefore k<-4$ 또는 $k>0\cdots$ ㉠
(ii) $f(0)<0$ 에서 $k^2-1<0$
　　$\therefore -1<k<1\cdots$ ㉡
(iii) $f(4)>0$ 에서 $k^2-16k+15>0$
　　$\therefore k<1$ 또는 $k>15\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면
$0<k<1$

15. $a > b$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 의 해는 $x > a$ 이다.

② $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 $x < b$ 이다.

③ $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.

④ $\begin{cases} x > -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 $x > -a$ 이다.

⑤ $\begin{cases} x < -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 없다.

해설

② $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.

③ $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 $x < b$

④ $\begin{cases} x > -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 $x > -b$

16. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

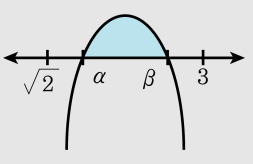
㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

17. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x의 범위가 $1 < x \le 2$일 때, k의 범위는?

① $k > -1$　　② $k > 0$　　③ $k < -1$

④ $k < 1$　　⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \le 0$ 에서

$(x+1)(x-2) \le 0 \quad \therefore -1 \le x \le 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0$ 에서

$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \cdots\cdots$ ㉡

i) $k + 2 < 1$ 이면

㉡의 해는 $k + 2 < x < 1$ 가 되므로

㉠, ㉡ 의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k + 2 > 1$ 이면

㉡의 해는 $1 < x < k + 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 되려면

$k + 2 > 2 \quad \therefore k > 0$

18. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k값의 범위를 구하면?

① $k < 0$, $k > 1$　　② $k \le 0$, $k \ge 2$　　③ $0 < k < 1$

④ $0 \le k \le 1$　　⑤ $0 < k < 2$

해설

$x^2 - 2x + k = f(x)$라 하면

$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$

$\therefore k > 0, k < 1$

$\therefore 0 < k < 1$

19. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　② $2 < a < 5$　③ $3 < a < 6$
④ $4 < a < 7$　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore D &= a^2 - 4(a+3) \\ &= a^2 - 4a - 12 \\ &= (a-6)(a+2) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a = 6 \ (\because a > 0)$

20. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+5a>0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a>0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a=0$일 때 해는 $x=0$뿐이다.
㉢ $a<0$일 때 해는 없다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+4ax+5a>0$에서
$a(x^2+4x+5)>0,\ a\{(x+2)^2+1\}>0$
㉠ $a>0$일 때 $(x+2)^2+1>0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a=0$일 때 $0\cdot\{(x+2)^2+1\}>0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a<0$일 때 $(x+2)^2+1<0$ $\therefore$ 해는 없다.

21. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases}(x+a)(x-4)<0\\(x-a)(x-3)>0\end{cases}$ 의 해가 $3<x<4$가 되도록 하는 실수 a 의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 3　　② -3　　③ 4　　④ -4　　⑤ -7

해설

$(x+a)(x-4)<0 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)(x-3)>0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통해가 $3<x<4$이므로
$-a<4,\ a<3$ 이어야 한다.
$\therefore$ ㉠의 해는 $-a<x<4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 해는 $x<a$ 또는 $x>3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위가 $3<x<4$ 이려면
$-a \le 3,\ a \le -a$
$\therefore -3 \le a \le 0$
$\therefore M=0,\ m=-3 \therefore M-m=3$

22. $\frac{x+3}{2}$ 의 절대값이 1 보다 크고 4 보다 작을 때, 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

(1) $1 < \frac{x+3}{2} < 4$ 일 때,

$2 < x+3 < 8$,

$-1 < x < 5$

$\therefore x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(2) $-4 < \frac{x+3}{2} < -1$ 일 때,

$-8 < x+3 < -2$,

$-11 < x < -5$

$\therefore x = -10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -6$

따라서 만족하는 정수 x 의 개수는 10 개이다.

23. 출판사 영업부에 다니는 황영민 씨는 기본 월급 100 만원에 한 달간 도서 판매 금액의 3% 를 추가하여 월급을 받는다. 어느 달 황영민 씨가 가격이 각각 10000 원인 책 A 와 12000 원인 책 B 를 모두 합해 4000 권 팔아서 220 만원 이상, 230 만원 이하의 월급을 받았을 때, 판매한 책 B 의 최대 판매량을 구하여라. (단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답 : _____ 권

▷ 정답 : 1666 권

해설

책 B 의 판매량을 x 권이라 하면 책 A 의 판매량은 $4000 - x$ 권이므로

$$220 \le 100 + 1 \times \frac{3}{100}(4000 - x) + 1.2 \times \frac{3}{100}x \le 230$$

$$\therefore\ 0 \le x \le \frac{5000}{3}$$

따라서 책 B 의 최대 판매량은 1666 권

24. 장난감을 만드는 완구공장에서 장난감을 만들어 일정한 크기의 상자에 담고 있다. 한 상자에 장난감을 40 개씩 담으면 마지막 상자에는 23 개의 장난감이 들어간다. 불량품인 경우는 상자에 담지 않는다고 한다. 불량품이 49 개 생겨서 한 상자에 34 개씩 담았더니 상자가 부족했고 한 상자에 35 개씩 담았더니 마지막 상자만 가득 차지 않았다고 한다. 이 때 상자의 최소 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

상자의 개수를 x 개라 하면, 장난감의 개수는 $40(x-1)+23=40x-17$(개) 이다.
그런데 49 개는 상자에 담지 않았으므로
$40x-17-49=40x-66$
$34x<40x-66<35x$
$\therefore 11<x<13.2$
따라서 상자의 개수는 12 개 또는 13 개이므로 최소 개수는 12 개이다.