1. 점 $A(5,-4), B(-1,2)$ 를 잇는 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (a,b) 라고 하자. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2},\ \frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2}\right)=(3,\ -2)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot5}{1-2},\ \frac{1\cdot2-2\cdot(-4)}{1-2}\right)=(11,\ -10)$$

선분 PQ 의 중점 M

$$(a,b)=\left(\frac{11+3}{2},\frac{-2-10}{2}\right)=(7,\ -6)$$

$\therefore\ a+b=1$

2. 좌표평면상의 점 $\mathrm{P}(2,3)$ 에 대하여, 점 P 를 지나고 $\overline{\mathrm{OP}}$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $x-2y=5$ ② $2x+3y=13$ ③ $x+3y=10$
④ $2x+y=13$ ⑤ $3x-2y=10$

해설

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

그리고 $(2,\ 3)$ 을 지나므로

$\Rightarrow\ \ y=-\frac{2}{3}(x-2)+3$

$\Rightarrow\ \ 2x+3y=13$

3. 두 직선 $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점과 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점은 $(2,1)$
$\therefore$ $4x+3y-1=0$ 까지의 거리 :
$\dfrac{|4\times 2+3\times 1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

4. 다음<보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k$ 이다.

$y = 0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2 = 1 - k$

$\Rightarrow$ $k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.

㉣ $x = 0$ 를 대입 후 정리하면,

$(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$

$\therefore$ $k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

㉤ 중심이 $y = x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (㉠,㉣,㉤) 가 참이다.

5. x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 넓이를 직선 $y=\frac{1}{3}x+b$가 이등분할 때, $6b$의 값으로 적당한 값을 찾으면?

① 2　② -3　③ 4　④ -5　⑤ 6

해설

x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은$(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.

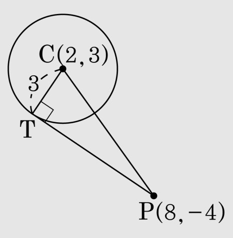
원의 넓이를 직선 $y=\frac{1}{3}x+b$가 이등분 하므로 이 직선은 원의 중심인 $(1,1)$을 지나야 한다.

따라서 $b=\frac{2}{3},\ 6b=4$

6. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2 = 9$ 밖의 한 점 $P(8,-4)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $3\sqrt{19}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $5\sqrt{19}$

해설



다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 P(8, −4) 에서
원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 에 접선을 그어 그 접점을 T, 이 원의 중심을 C 라고 하면
$\triangle$PTC 는 $\angle$PTC $= 90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PT}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CT}^2$
$= \left\{(8-2)^2+(-4-3)^2\right\} - 3^2 = 76$

$\overline{PT} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

7. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]
$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
$-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면
$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$
정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

8. 부등식 $x^2+ax+a+3 \le 0$을 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1<a<3$ ② $2<a<5$ ③ $3<a<6$
④ $4<a<7$ ⑤ $6<a<7$

해설

$x^2+ax+a+3 \le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2+ax+a+3=0$이 중근을 가져야 한다.

$\therefore D = a^2-4(a+3)$
$= a^2-4a-12$
$= (a-6)(a+2) = 0$

$\therefore a = 6\ (\because a>0)$

9. 수직선 위의 세 점 A(1), B(6), C(8) 과 동점 P(x) 가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 될 때, 점 P 에서 점 A 까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

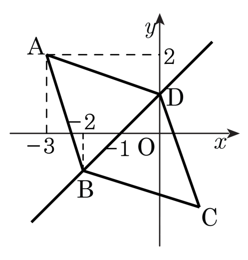
$= (x-1)^2 + (x-6)^2 + (x-8)^2$

$= 3(x-5)^2 + 26$

따라서 $x = 5$ 일 때 최소가 된다.

점 P(5) 에서 점 A(1) 까지 거리는 $|5-1| = 4$ 이다.

10. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

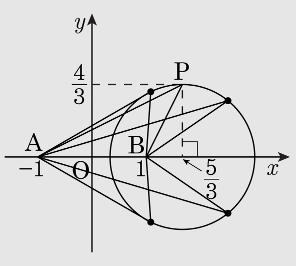
대각선 BD 의 중점은 $\mathrm{M}(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$,
$\overline{\mathrm{AM}}$ 의 기울기가 -1 이므로
$\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기는 1,
점 B와 점 D의 y값을 a, b라 하면
$b-a=2,\ \dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1,\ b=1$ 이다.
$\therefore\ \mathrm{D}(0,\ 1)$
$\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{MD}}=\sqrt{2}$ 이므로
마름모 ABCD 의 넓이는
$4\left(\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$

11. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면



$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

12. 원 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2,\ 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\frac{14}{3}\pi$　② 5π　③ $\frac{16}{3}\pi$　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ $\frac{15}{4}\pi$

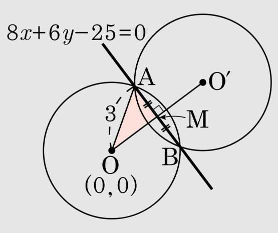
해설

x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(-2,\ 0)$ 을 지나므로
$(-2-a)^2+b^2=b^2 \Rightarrow a=-2$
$(x+2)^2+(y-b)^2=b^2$
$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 에 외접하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 길이 합과 같다.
$\Rightarrow \sqrt{(1+2)^2+(4-b)^2}=b+2$
$\Rightarrow b=\frac{7}{4}$
$\therefore 2\cdot\pi\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}\pi$

13. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9) - (x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

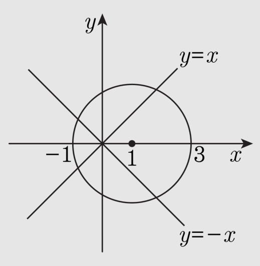
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$



$\therefore\ (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

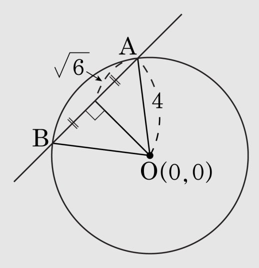
즉, 해는 4 개이다.

15. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$\overline{\mathrm{HA}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6}$

이 때, $\triangle\mathrm{AHO}$ 가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$

따라서 원의 중심 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10},\ |k| = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ k = 2\sqrt{5}\ (\because\ k > 0)$

16. 점 A(3, 5) 와 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심이 $(-1,\ 2)$ 이므로

점 A 와 원의 중심 사이의 거리는

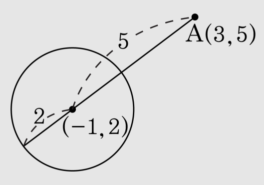
$\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$

이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로

($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값)$=5+$ (반지름의 길이)$=5+2=7$

($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값)$=5-$ (반지름의 길이)$=5-2=3$

따라서 구하는 합은 $7+3=10$



17. 세 변의 길이 a, b, c 가 각각 $7x-9$, $2x+1$, $3(x-1)$ 인 어떤 삼각형이 있다. a, b, c 는 모두 자연수이고, a 가 가장 긴 변일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

해설

삼각형의 세 변의 길이 관계는
(가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합) 이어야 하므로
$7x-9 < (2x+1)+3(x-1)$
$\therefore\ x < \frac{7}{2} \cdots ㉠$
또 변의 길이는 양수이어야 하므로
$7x-9 > 0$
$\therefore\ x > \frac{9}{7} \cdots ㉡$
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면
$\frac{9}{7} < x < \frac{7}{2}$
세 변의 길이가 모두 자연수이기 위해서 x 는 정수이어야 하므로
$\therefore\ x = 2,\ 3$

18. 9 시에 문을 여는 극장에 8 시 30 분부터 1 분에 10 명씩 사람들이 몰려와 줄을 서기 시작하고, 이후에도 계속 시간당 같은 인원이 꾸준히 극장에 온다. 9 시부터 3 개의 표 발매 창구에서 표를 팔면 9 시 15 분에 줄 서 있는 사람이 없어질 것으로 예상된다. 이때, 줄 서 있는 사람이 없어지는 시간을 7 분 앞당기려면 발매 창구를 최소 몇 개 더 열어야 하는지 구하여라. (단, 창구 하나당 발매하는 표의 수는 모두 같다.)

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

9 시에 발매를 시작하기 전에 이미 줄 서 있는 사람 수가 $30 \times 10 = 300$ (명) 이고
1 분 동안 발매하는 표가 x 장이라고 하면
3 개의 발매 창구에서 표를 팔면 15 분 동안 모두 판매하므로
$3 \times 15x = 300 + 15 \times 10 \quad 45x = 450 \qquad \therefore x = 10$,
한편 모두 판매하는 시간을 7 분 앞당기면 8 분 동안 모두 판매해야 하므로
발매 창구의 개수를 a 개라 하면
$a \times 10 \times 8 \geq 300 + 10 \times 8, 80a \geq 380$
$\therefore a \geq \dfrac{19}{4}$
따라서 발매창구가 적어도 5 개 있어야 하므로 최소 2 개의 발매 창구를 더 열어야 한다.

19. x에 관한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 - 2a = 0$이 실수 해 α, β를 가질 때 $\alpha\beta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M + m$은 ?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{6}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

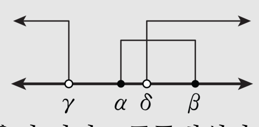
해설

준 방정식의 판별식
$D = a^2 - 4(a^2 - 2a) \geq 0$ ($\because$ 실수해를 가지므로)
$a^2 - 4a^2 + 8a \geq 0,\ -3a^2 + 8a \geq 0$
$3a^2 - 8a \leq 0,\ a(3a - 8) \leq 0$
$\therefore\ 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$
또, 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$
$\therefore\ \alpha\beta$의 최솟값은 $a = 1$일 때, -1, 최댓값은 $a = \frac{8}{3}$일 때, $\frac{16}{9}$
$\therefore\ m + n = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$

20. 두 부등식 $x^2 + ax + b \le 0$, $x^2 + x + a > 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $1 < x \le 2$ 일 때, ab의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설



$x^2 + ax + b \le 0$ 의 해를 $\alpha \le x \le \beta$

$x^2 + x + a > 0$ 의 해를 $x < \gamma$, $x > \delta$

라 하고

조건에 맞게끔 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 공통범위가

$1 < x \le 2$ 이므로

$\delta = 1, \beta = 2$ 가 되어야 한다.

$\delta = 1$이 $x^2 + x + a = 0$의 근이므로

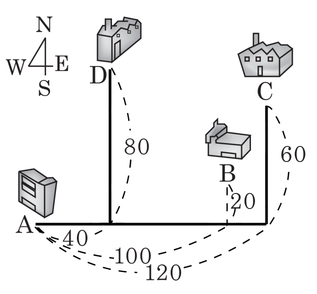
$1 + 1 + a = 0$에서 $a = -2$

$\beta = 2$가 $x^2 + ax + b = 0$의 근이므로

$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = 0$

따라서 $ab = 0$

21. 네 개의 공장 A, B, C, D는 A 공장을 기준으로 B 공장은 정동방향으로 100 m 이동한 다음 정북방향으로 20 m 이동한 지점에, C 공장은 정동방향으로 120 m 이동한 다음 정북방향으로 60 m 이동한 지점에, D 공장은 정동방향으로 40 m 이동한다음 정북방향으로 80 m 이동한 지점에 있다. 네 개의 공장에서 흘러나오는 폐수를 정화하기 위해 배관시설에 드는 비용을 최소로 하여 정화시설을 만들려고 할 때, 정화시설은 A 공장으로부터 정동방향으로 a m, 정북방향으로 b m인 지점이다. 이때, $a+2b$의 값을 구하면? (단, 각 공장에서 정화시설까지 하수도배관이 묻히는 고도는 무시하여 연결되며 비용은 배관의 길이에 비례한다.)



▶ 답 :

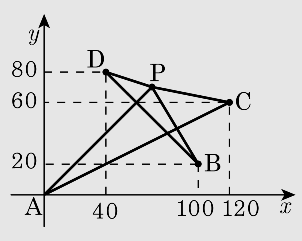
▷ 정답 : 160

해설

점 A를 원점으로 하여 공장 B, C, D의 위치를 좌표평면 위에 나타내면 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{CP} \ge \overline{AC}$ 이고 $\overline{BP}+\overline{DP} \ge \overline{BD}$ 이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP} \ge \overline{AC}+\overline{BD}$



점 P가 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점일 때 각 공장에서 정화시설까지의 거리가 최소이다.

$\overline{AC}$의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$, $\overline{BD}$의 방정식은

$y=-x+120$ 이고, 교점의 좌표는 $(80,\ 40)$

따라서 $a=80,\ b=40$

$\therefore\ a+2b=160$

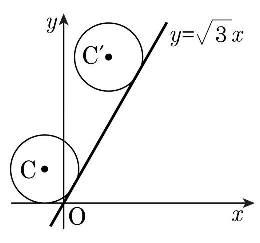
22. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P\ (x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y|=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y=\pm\frac{4x-3y}{5}$
기울기가 양수이므로 $y=\frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

23. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 C : $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?



① $\frac{3+\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}+1)\pi$　② $\frac{3-\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}-1)\pi$

③ $\frac{3+\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$　④ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$

⑤ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{b-1}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서

$b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$\Rightarrow \ (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b-1)^2 = 16\pi^2$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$

$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$

$\Rightarrow \ (\sqrt{3}a+1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$

$\Rightarrow \ a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \ (\because a > 0)$

$\Rightarrow \ b = 2\sqrt{3}\pi + 1$

$\therefore \ a + b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$

24. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ 의 중심을 A 라 하고, 이 원을 직선 $l : 2x - y - 6 = 0$ 에 대하여 대칭 이동하였을 때, 이동된 원의 중심을 B 라 하고, 직선 l 의 y 절편을 C 라 할 때, 세 점 A, B, C 에 의하여 만들어지는 △ABC 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$　② $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$　③ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
④ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$　⑤ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

해설

원의 방정식을 정리하면,
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$　중심 : $\mathrm{A} = (2, 3)$ $\mathrm{B} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 라 하면,
$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 l 에 수직하고, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 l 위에 있다.
i) 기울기 : $\frac{3-b}{2-a} = -\frac{1}{2}$　$\Rightarrow a + 2b = 8$
ii) $2 \times \left(\frac{a+2}{2}\right) - \left(\frac{3+b}{2}\right) - 6 = 0$
$\Rightarrow \quad 2a - b = 11$
i) 과 ii) 를 연립하면,
$a = 6 \quad b = 1$
$\therefore \mathrm{B} = (6, 1)$
l 의 절편 : $\mathrm{C} = (0, -6)$
$\therefore$　△ABC 의 무게중심 :
$\left(\frac{2+6+0}{3}, \frac{3+1+(-6)}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$