1. 두 점 A$(a, 1)$, B$(3, b)$ 에 대하여 선분 AB를 3 : 2 로 외분하는 점이 (1, 4) 일 때, $a+b$ 를 구하면?

① 6　② 4　③ 3　④ −3　⑤ 5

해설

$(1,4) = \left(\dfrac{3\cdot3-2\cdot a}{3-2}, \dfrac{3\cdot b-2\cdot 1}{3-2}\right)$

$= (9-2a, 3b-2) = (1,\ 4)$ 이므로

$9-2a = 1$, $2a = 8$, $a = 4$

$3b-2 = 4$, $3b = 6$, $b = 2$

$\therefore\ a+b = 6$

2. x축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-2=0$까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라 할 때 $-ab$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\alpha-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$\therefore |2\alpha+1|=|\alpha-2|$

$\therefore 2\alpha+1=\pm(\alpha-2)$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3},\ -3$

$\therefore \left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(-3,\ 0)$이므로

$-ab=-\frac{1}{3}\times -3=1$

3. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(1,\ -3)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로
$\frac{a+1}{2}=-1, \frac{b+3}{2}=2$에서
$a=-3, b=1$
$\therefore (-3,\ 1)$

4. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2-4x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}$

$= \sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8+2\sqrt{12}} + \sqrt{8-2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + 3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 4$ 가 되도록 하는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 1$　② $-1 < k < 3$　③ $k \ge -1$

④ $k \le 1$　⑤ $-1 \le k \le 3$

해설

$x^2 - 5x + 4 \le 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \le 0$, $1 \le x \le 4$

$x^2 - (k+3)x + 3k > 0$ 에서 $(x-k)(x-3) > 0$

ⅰ) $x < k$ 또는 $x > 3$

ⅱ) $x < 3$ 또는 $x > k$

해가 $3 < x < 4$ 가 되려면 ⅰ) 의 경우이어야 하고 $k \le 1$ 이어야 한다

6. 두 원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$, $(x-4)^2 + y^2 = n^2$ 이 서로 다른두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 개수는?

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 중심 사이 거리가 반지름의 합보다는 작고 반지름의 차보다는 커야 한다.

$\Rightarrow \quad |n-2| < \sqrt{3^2+4^2} < n+2$

$\Rightarrow \quad -5 < n-2 < 5, \quad 5 < n+2$

$\Rightarrow \quad -3 < n < 7, \quad 3 < n$

$\therefore \quad 3 < n < 7$

$\therefore$ 자연수 $n = 4,\ 5,\ 6 \quad 3$ 개

7. 원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=mx$ 에 접한다고 한다. 이때, 이를 만족하는 모든 상수 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여
대칭이동하면 $(-x)^2+y^2-6(-x)+4y+9=0$,
$x^2+y^2+6x+4y+9=0$
$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=4$
이 원이 직선 $y=mx$ 에 접하므로 원의 중심
$(-3,-2)$ 에서 직선 $mx-y=0$ 에 이르는 거리는
반지름 2 와 같다.
즉, $\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
이것을 정리하여 풀면 $m=0$ 또는 $m=\frac{12}{5}$
따라서 모든 상수 m 의 합은 $\frac{12}{5}$

8. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$　　㉡ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \ \cdots ①$

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots ②$

㉠ ① 식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1, \ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

㉢ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\therefore$ ㉠, ㉢ 맞음

9. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.
(i) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

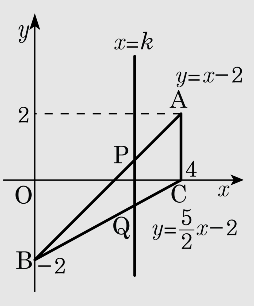
이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$
(ii) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$
(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

10. 세 점 A $(4,\ 2)$, B $(0,\ -2)$, C $(4,\ 0)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=k$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x=k$와 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P $(k,\ k-2)$, Q $\left(k,\ \dfrac{1}{2}k-2\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left\{(k-2)-\left(\dfrac{1}{2}k-2\right)\right\}\times k=2,\ k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}\ (\because\ 0<k<4)$

11. x, y가 실수이고 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$을 만족할 때, $\frac{y}{x}$의 최대값 M, 최소값 m의 합 $M + m$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$\frac{y}{x} = k$라 하자. $y = kx$이므로
$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$에서
$(k - 2k + 1)x^2 - (2 + 2k)x + 4 = 0$
x, y는 실수이므로, 판별식은 0보다 크거나 같다.
$\therefore\ D' = (k + 1)^2 - 4(k^2 - 2k + 1) \geq 0$
$3k^2 + 10k - 3 \geq 0$
$3k^2 - 10k + 3 \leq 0$
$(k - 3)(3k - 1) \leq 0$
$\frac{1}{3} \leq k \leq 3$
$\therefore\ m + M = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

12. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+y^2=r,\ x+y=r$이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.
$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2-2rx+r^2-r=0$
$D/4=r^2-2(r^2-r)=0$ 에서
$-r^2+2r=0,$
$\therefore\ r=0,\ 2$
따라서 양수 $r=2$