1. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

2. 점 $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$ 을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

3. 두 직선 $y=x+1$, $y=-2x+4$의 교점과 점 $(-1,3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ② $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ③ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
④ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

$y=x+1 \Leftrightarrow x-y+1=0$
$y=-2x+4 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$에서
두 직선의 교점을 지나는 방정식은
$(x-y+1)+k(2x+y-4)=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,3)$을 지나므로
$(-1-3+1)+k\cdot\{2\cdot(-1)+3-4\}=0$
$\therefore\ k=-1$
따라서, $k=-1$을 ㉠에 대입하면
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

4. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10　② 8　③ 6　④ 5　⑤ 4

해설

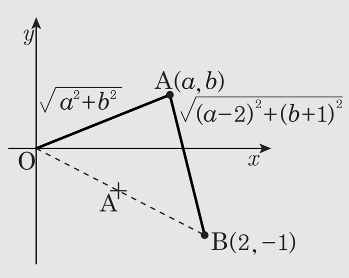
중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

5. 좌표평면 위에 점 O(0, 0), A(a, b), B(2, −1) 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\text{OA}}$ 의 길이이고,
$\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\text{AB}}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\text{OB}}=\sqrt{5}$



6. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(3,\ -1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $2x-y+k=0$ 은 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나는 직선으로 옮겨진다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

점 $(1,2)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
점 $(3,-1)$ 로 옮겨진다.
따라서, 이러한 평행이동에 의하여
직선 $2x-y+k=0$ 을 옮기면
$2(x-2)-(y+3)+k=0$
$\therefore 2x-y+k-7=0$
이 직선이 점 $(-1,3)$ 을 지나므로
$2\cdot(-1)-3+k-7=0$
$\therefore k=12$

7. 점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B$(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$위에 있으므로

$4\cdot\frac{1+a}{2}-2\cdot\frac{2+b}{2}-5=0$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\frac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore$ B(3, 1)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

8. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

9. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P$(-4,\ 6)$ ② P$(-4,\ -6)$ ③ P$(2,\ 3)$
④ P$(3,\ 2)$ ⑤ P$(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

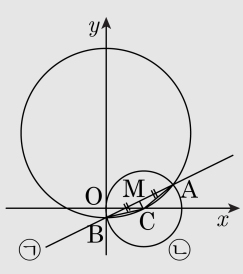
10. 두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4y-1=0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$ ② $\dfrac{\sqrt{95}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{95}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{95}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2x-\left(x^2+y^2-4y-1\right)=0$
$-2x+4y+1=0,\ 2x-4y-1=0\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x=0$에서
$(x-1)^2+y^2=1\cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C$(1,0)$이라 하면
중심 C$(1,0)$에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\mathrm{CM}}$은



$$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\cdot\frac{\sqrt{95}}{10}=\frac{\sqrt{95}}{5}$$

11. 실수 x, y 가 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$　　② $2\sqrt{13}$　　③ $2\sqrt{17}$　　④ 16　　⑤ 28

해설

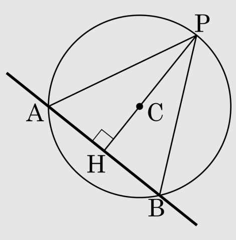
$x^2+y^2=k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
$\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{k}$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}-1)^2$
$\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{k}-1$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}+1)^2$
$\therefore$ k 의 합은 $(\sqrt{13}-1)^2+(\sqrt{13}+1)^2=28$

12. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$와 직선 $3x+4y-1=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\triangle$PAB의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $3\sqrt{5}$　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{5}$

해설

원 위의 점 P에서 직선 $3x+4y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같이 $\overline{\text{PH}}$가 원의 중심을 지날 때, $\triangle$PAB의 넓이가 최대이다.



이 때, 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$의 중심 C$(1,2)$에서 직선 $3x+4y-1=0$에 이르는 거리는

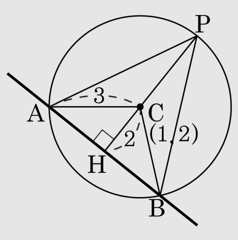
$$\overline{\text{CH}}=\frac{|3\cdot1+4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore \overline{\text{PH}}=3+2=5$

또, 다음 그림에서 $\triangle$CAH는 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의하여

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=2\sqrt{5}$



따라서, $\triangle$PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{PH}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times5=5\sqrt{5}$$