

1. $ac < 0$, $bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.



답 :

사분면



정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{7}$$

$ac < 0$, $bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 $\textcircled{7}$ 은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

2. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3) 을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

3. 두 직선 $y = x + 1, y = -2x + 4$ 의 교점과 점 $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

$$y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0 \text{에서}$$

두 직선의 교점을 지나는 방정식은

$$(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$$

$$\therefore k = -1$$

따라서, $k = -1$ 을 ⑦에 대입하면

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

4. 점 $(2, 1)$, $(4, -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10

② 8

③ 6

④ 5

⑤ 4

해설

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면
 y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
 $r = |a|$ 이다.

$$\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$$

$$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \times 2 - \textcircled{㉢} \text{에서 } b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$$

$$\therefore b = -1, 7$$

이때, $\textcircled{㉡}$ 에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } 10$$

따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

5. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때,
 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

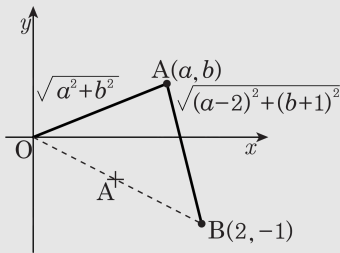
⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$
 의 길이이다.

따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)

따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



6. 점 (1, 2) 를 점 (3, -1) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $2x - y + k = 0$ 은 점 (-1, 3) 을 지나는 직선으로 옮겨진다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

점 (1, 2) 를 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
점 (3, -1) 로 옮겨진다.

따라서, 이러한 평행이동에 의하여
직선 $2x - y + k = 0$ 을 옮기면

$$2(x - 2) - (y + 3) + k = 0$$

$$\therefore 2x - y + k - 7 = 0$$

이 직선이 점 (-1, 3) 을 지나므로

$$2 \cdot (-1) - 3 + k - 7 = 0$$

$$\therefore k = 12$$

7. 점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B(a, b)라 하면,

$\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ 가

직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 위에 있으므로

$$4 \cdot \frac{1+a}{2} - 2 \cdot \frac{2+b}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB와 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 이

$$\text{수직이므로 } \frac{b-2}{a-1} \times 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 1$

$$\therefore B(3, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

8. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

9. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

10. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{95}$ ② $\frac{\sqrt{95}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{95}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{95}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - (x^2 + y^2 - 4y - 1) = 0$$

$$-2x + 4y + 1 = 0, 2x - 4y - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{L}$$

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B,
 $\overline{AB}$ 의 중점을 M, 원 $\textcircled{L}$ 의 중심을 C(1,0)
 이라 하면

중심 C(1,0)에서 직선 $\textcircled{7}$ 까지의 거리
 $\overline{CM}$ 은

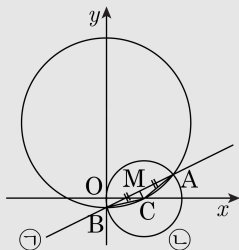
$$\overline{CM} = \frac{|2 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 $\textcircled{L}$ 의 반지름의 길이는 1이므로 피타
 고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10} = \frac{\sqrt{95}}{5}$$



11. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$

② $2\sqrt{13}$

③ $2\sqrt{17}$

④ 16

⑤ 28

해설

$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,

두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.

⇒ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합

⇒ $\sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$

⇒ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차

⇒ $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$

$\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

12. 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 와 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $2\sqrt{5}$

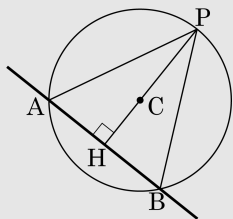
③ $3\sqrt{5}$

④ $4\sqrt{5}$

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

원 위의 점 P에서 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같이 PH가 원의 중심을 지날 때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 최대이다.



이 때, 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 의 중심 $C(1,2)$ 에서 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\overline{CH} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore \overline{PH} = 3 + 2 = 5$$

또, 다음 그림에서 $\triangle CAH$ 는 직각삼각형
이므로 피타고라스정리에 의하여

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{5}$$

따라서, $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}$$

