1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x - 11 < 5x + 7 \\ 3(x - 1) \le 4(2 - x) + 2 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 A , 가장 작은 정수를 B 라 할 때, $A + B$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

i) $2x - 11 < 5x + 7$

$\Rightarrow\ x > -6$

ii) $3(x - 1) \le 4(2 - x) + 2$

$\Rightarrow\ 3x - 3 \le 8 - 4x + 2$

$\Rightarrow\ 3x + 4x \le 10 + 3$

$\Rightarrow\ x \le \frac{13}{7}$

$-6 < x \le \frac{13}{7}$ 이므로

$A = 1,\ B = -5$

$\therefore A + B = 1 + (-5) = -4$

2. 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 3),\ \mathrm{B}(-6,\ 0),\ \mathrm{C}(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(a, b)$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 $2:1$ 로 외분하는 점을 $\mathrm{Q}(c, d)$ 라고 할 때, $c-3a+bd$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 12 ③ 24 ④ 25 ⑤ 40

해설

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\cdot(-6)+1\cdot(0)}{2+1},\ \dfrac{2\cdot(0)+1\cdot(3)}{2+1}\right)$

$=\mathrm{P}(-4,\ 1)=\mathrm{P}(a,\ b)$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2\cdot3-1\cdot(-6)}{2-1}, \dfrac{0}{2-1}\right)=\mathrm{Q}(12,\ 0)=\mathrm{Q}(c,\ d)$

$\therefore\ c-3a+bd=12-3\cdot(-4)+1\cdot0=24$

3. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(1,\ 1)$, B $(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a\le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2 개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답:

▷ 정답: $4<a\le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a\le 7x+1$ 을 풀면 $a-1\le x$ 이다.
따라서 $a-1\le x<6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2 개이기 위해서 $3<a-1\le 4$, 따라서 $4<a\le 5$ 이다.

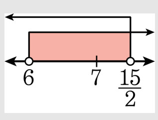
5. 어떤 자연수의 2 배에서 6 을 뺀 수는 9 보다 작고, 27 에서 그 자연수의 3 배를 뺀 수도 9 보다 작다고 한다. 이 때, 어떤 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{cases} 2x - 6 < 9 \\ 27 - 3x < 9 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2x < 9 + 6 \\ -3x < 9 - 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{15}{2} \\ x > 6 \end{cases}$$

$\therefore\ x = 7$

6. $|x-2| \le 2x-1$을 만족하는 x의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(ⅰ) $x \ge 2$일 때

$x-2 \le 2x-1$에서 $-1 \le x$

따라서 이 범위에서의 해는 $x \ge 2$

(ⅱ) $x < 2$일 때

$-x+2 \le 2x-1$에서 $1 \le x$

따라서 이 범위에서의 해는 $1 \le x < 2$

두 범위에서 구해진 해에 의해 나올 수 있는 x의 최솟값은 1이다.

7. 부등식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $1 \le a < 2$ ② $2 < a$ ③ $a < 1$

④ $0 < a \le 1$ ⑤ $1 < a < 2$

해설

ⅰ) $a=1 \Rightarrow a>0 \cdots$ 성립

ⅱ) $a \neq 1$ 모든 x에 대해 성립하려면

판별식이 0보다 작아야한다.

$\therefore \quad D' = (a-1)^2-(a-1)<0$

$\Rightarrow \quad (a-1)(a-2)<0$

$\Rightarrow \quad 1<a<2$

ⅰ), ⅱ)에 의해 $1 \le a < 2$

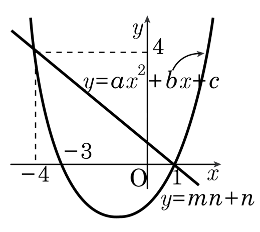
8. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2 - 2bx + a > 0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7 < x < -5$　② $-5 < x < -3$　③ $-3 < x < -1$
④ $5 < x < 7$　⑤ $7 < x < 9$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$의 해가
$\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$이므로 $a < 0$
$\left(x - \frac{1}{14}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right) < 0$에서
$(14x - 1)(10x - 1) < 0$
$\therefore\ -140x^2 + 24x - 1 > 0$
$a = -140k,\ b = 24k,\ c = -k$라 놓고
(단, $k > 0 \leftarrow a < 0$)
$4cx^2 - 2bx + a > 0$에 대입하면
$-4kx^2 - 2 \cdot 24kx - 140k > 0$
$x^2 + 12x + 35 < 0$
$\therefore\ (x + 7)(x + 5) < 0 \quad \therefore -7 < x < -5$

9. 다음 그림은 일차함수 $y = mx + n$과 이차 함수$y = ax^2 + bx + c$의 그래프이다. 다음 [보기] 중 옳은 것의 개수는?



보기

㉮ 연립방정식
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$ 의 해는
$x = -4,\ y = 4$와 $x = 1,\ y = 0$ 이다.

㉯ 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 해는 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$이다.

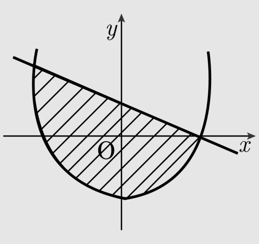
㉰ 부등식 $ax^2 + bx + c \leq mx + n$의 해는 $-4 \leq x \leq 1$이다.

㉱ 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에서 $a = 1$이다.

㉲ 일차함수 $y = mx + n$ 에서 $m = -\frac{4}{5}$이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

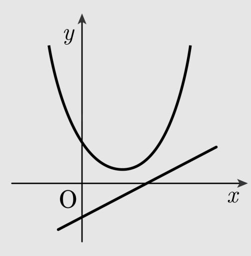


㉮ 교차점이 연립방정식의 해이다 (참)
㉰ 빗금 친 부분에 해당한다. 즉, $-4 \leq x \leq 1$
㉱, ㉲ 먼저 $(-4,4)(1,0)$ 을 지나는 직선의
방정식을 구하면
$$y = \left(\frac{4-0}{-4-1}\right)(x+4) + 4 = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$
연립방정식에 구한 직선의 방정식을 넣으면
$$\begin{aligned} ax^2 + \left(b + \frac{4}{5}\right)x + c - \frac{4}{5} &= a(x+4)(x-1) \\ &= ax^2 + 3ax - 4a \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad b + \frac{4}{5} = 3a, \quad c - \frac{4}{5} = -4a$$
그리고 이차함수는 $(-3,0)$ 을 지나므로
$9a - 3b + c = 0$
위의 세 식을 연립하면 $a = \frac{4}{5}$
$\therefore$ ㉮, ㉯, ㉰, ㉲ : 참

10. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$　　② $-1 < k < 0$　　③ $k > 0$
④ $0 < k < 1$　　⑤ $k > 1$

해설



포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.
즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로
$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$
$\therefore\ k < -1$

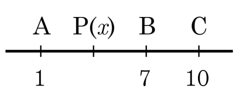
11. x에 대한 이차부등식 $a(2x^2+1) \le (x-1)^2$ 의 해가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $0 < a < \frac{3}{2}$
② $a > \frac{3}{2}$
③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$
④ $a \ge \frac{3}{2}$
⑤ $a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > \frac{3}{2}$

해설

$a(2x^2+1) \le (x-1)^2$ 에서
$2ax^2 + a \le x^2 - 2x + 1$,
$(2a-1)x^2 + 2x + a - 1 \le 0$이므로
$2a - 1 > 0$일 때
즉 $a > \frac{1}{2}$일 때
$\frac{D}{4} = 1 - (2a-1)(a-1)$
$= 1 - (2a^2 - 3a + 1) = -2a^2 + 3a < 0$이어야
모든 x에 대하여 성립한다.
즉 $a(2a-3) > 0$
$a < 0$ 또는 $a > \frac{3}{2}$인데
$a > \frac{1}{2}$이어야 하므로
$a > \frac{3}{2}$

12. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$

$= 3(x-6)^2 + 42$

따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

13. 양 끝점의 좌표가 $\mathrm{A}(3, 17)$, $\mathrm{B}(48, 281)$ 인 선분 AB 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 15 개 ④ 16 개 ⑤ 46 개

해설

선분 AB 의 방정식은

$y = \frac{88}{15}(x-3) + 17$

$3 \le x \le 48$

이때, y가 정수이려면,

$x-3$이 15 의 배수이어야 한다.

따라서 $x = 3, 18, 33, 48$로 모두 4 개이다.

문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(3, 17)$, $(18, 105)$, $(33, 193)$, $(48, 281)$로 모두 4 개

14. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.
$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$
이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$
$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

15. 직선 $y=-ax+2$가 직선 $y=bx+3$과 수직이고, 직선 $y=(b+3)x-1$과는 평행하다. 이 때, $a+b+ab$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

수직조건에서 $ab=1$이고,
평행조건에서 $a+b=-3$이다.
$\therefore\ a+b+ab=-2$

16. 두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$이 $a=\alpha$일 때 수직이고, $a=\beta$일 때 평행하다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$에 대하여

(1) 수직일 때, $1\cdot 2+(-2)\cdot a=0 \quad \therefore\ \alpha=1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}\neq-\frac{3}{2}$이어야 하므로

$a=-4, \quad \therefore\ \beta=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=17$

17. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면
$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$
k에 관한 항등식이므로
$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$
$\therefore x=-2,\ y=1$
$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$
$\therefore\ a=-2,\ b=+1$
$\therefore\ a+b=-1$

18. 평행한 두 직선 $12x-5y=3$, $12x-5y=29$사이의 거리를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 12　⑤ 26

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점을 택한 후 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$12x-5y=3$ 의 $\left(0,-\frac{3}{5}\right)$

$\therefore\ \dfrac{|12\times 0+(-\frac{3}{5})\times(-5)-29|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{26}{13}=2$

19. 두 부등식 $0.7 - x \le -2 - 0.1x$, $\dfrac{2+x}{3} \ge x + a$ 의 공통 부분이 없을 때, a 의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7 - x \le -2 - 0.1x 7 - 10x \le -20 - x - 9x \le -27,\ x \ge 3$

$\dfrac{2+x}{3} \ge x + a 2 + x \ge 3x + 3a - 2x \ge 3a - 2,\ x \le 1 - \dfrac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1 - \dfrac{3}{2}a < 3$,

$-\dfrac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ a > -\dfrac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a 의 값은 -1 이다.

20. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하면?

$|x^2-2x| = y-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$y \le x+1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2-2x|+1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2-2x| \le x$
(i) $x^2-2x \ge 0$ $(x \le 0,\ x \ge 2)$ 일 때
$x^2-2x \le x$
$\therefore\ x(x-3) \le 0$
$\therefore\ 0 \le x \le 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x=0,\ 2 \le x \le 3$
(ii) $x^2-2x < 0$ $(0 < x < 2)$ 일 때
$-(x^2-2x) \le x$
$\therefore\ x(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le 0,\ x \ge 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \le x < 2$
(i), (ii) 에서 정수 x를 구하면 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
x의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1,\ 2,\ 1,\ 4$
구하는 순서쌍$(x,\ y)$는
$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

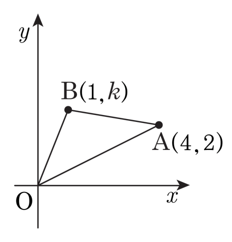
21. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

22. 다음 그림과 같이 $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(1,k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3

④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.

점 $B(1,k)$ 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리

h 는 $h=\frac{|1\times1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{OA}=2\sqrt{5}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$

23. $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a < 2b,\ b < 3c,\ c < 4d,\ d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 $b,\ c,\ d$가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

24. 빵을 한 사람당 5 개씩 나누어 주었을 때, 58 개가 남았고, 7 개씩 나누어 주었을 때는 마지막 받는 사람이 4 개 이상 6 개 미만으로 빵을 받았다고 한다. 빵의 개수는 몇 개인가?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 208 개

해설

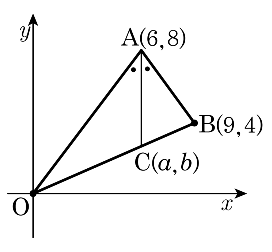
사람의 수를 x 명이라고 하였을 때, 빵의 개수는 $(5x+58)$ 개이다. "7 개씩 나누어 주었을 때 마지막 받는 사람이 4 개 이상 6 개 미만"이라는 것은 사람의 수를 x 라고 하였을 때, $(x-1)$ 명까지는 7 개를 받았고 나머지 한 명이 다르게 받은 것이므로, 마지막 사람이 4 개를 받은 경우는 총 빵의 개수가 $7(x-1)+4$ 개이고, 6 개 인 경우는 총 빵의 개수가 $7(x-1)+6$ 개이다. 따라서 빵의 개수는 마지막 사람이 4 개 이상 받은 경우와, 6 개 미만 받은 경우 사이에 있으므로, 이를 식으로 나타내면 $7(x-1)+4 \le 5x+58 < 7(x-1)+6$ 이다. 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 7(x-1)+4 \le 5x+58 \\ 5x+58 < 7(x-1)+6 \end{cases}$ 이다.

간단히 하면 $\begin{cases} x \le \dfrac{61}{2} \\ x > \dfrac{59}{2} \end{cases}$ 이다. 따라서 x 의 범위는 $\dfrac{59}{2} < x \le \dfrac{61}{2}$ 이다.

$\dfrac{59}{2} = 29.5$ 이고, $\dfrac{61}{2} = 30.5$ 이므로 $x = 30$ 이다.

따라서 빵의 개수는 $5 \times 30 + 58 = 208$ (개) 이다.

25. 다음 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(6, 8), B(9, 4)를 꼭짓점으로 하는 △AOB가 있다. ∠A 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 C(a, b) 라 할 때, ab 의 값은?



① 12　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 18

해설

$\angle OAC = \angle BAC$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$가 성립한다.
이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$
$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2+(4-8)^2} = 5$ 이므로
점 C 는 $\overline{OB}$ 를 10 : 5 ,
즉 2 : 1 로 내분하는 점이다.
따라서 점 C 의 좌표는

$$C\left(\frac{2\times 9+1\times 0}{2+1},\ \frac{2\times 4+1\times 0}{2+1}\right)$$

$$\therefore\ C\left(6,\ \frac{8}{3}\right) \quad \therefore\ ab = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$$