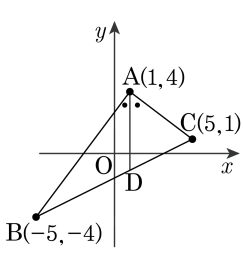


1. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

2. 두 점 A(1, 2), B(-2, 6) 사이의 거리는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{1 - (-2)^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

3. 두 점 $(0, 0)$, $(4, -3)$ 사이의 거리를 구하면?

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

4. 두 점 A(1,4), B(3,5) 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45 ② 43 ③ 41 ④ 39 ⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (-4)^2 + (x-3)^2 + (-5)^2 = 2x^2 - 8x + 51 \\ &= 2(x-2)^2 + 43\end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43이다.

5. 두 점 A $(-5, 1)$, B $(3, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(0, 0)$

② $(0, 1)$

③ $(0, 3)$

④ $(0, 4)$

⑤ $(0, -1)$

해설

y 축 위의 점을 Q $(0, a)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{QB}$

$\therefore (0 + 5)^2 + (a - 1)^2 = (0 - 3)^2 + (a - 5)^2$

정리하면 $a = 1 \quad \therefore Q (0, 1)$

6. 두 점 A $(-1, 1)$, B $(1, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(3, 0)$ ② $(5, 0)$ ③ $(0, 3)$ ④ $(0, 5)$ ⑤ $(0, 7)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, a)$ 라 하면

$\therefore 1^2 + (a - 1)^2 = 1^2 + (a - 5)^2$ 정리하면

$a = 3$

7. 두 점 A $(-2, 2)$, B $(5, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(1, 0)$

② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

③ $(2, 0)$

④ $(3, 0)$

⑤ $(4, 0)$

해설

x 축 위의 점을 P $(x, 0)$ 이라 하면, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(x + 2)^2 + 2^2 = (x - 5)^2 + 5^2 \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$
 $\therefore$ P $(3, 0)$

8. 두 점 A (-3,2) , B (4,5) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (3, 0)

⑤ (4, 0)

해설

P(x,0)이라 놓으면 두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (5-0)^2} \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

$$\therefore P(2,0)$$

9. 두 점 A (3, -2) , B (-1, 2) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① (1, -1)

② (-1, 0)

③ (1, 0)

④ (2, 0)

⑤ (2, -1)

해설

$$x \text{ 축 위의 점 } P(x, 0) \text{ 이라 하면 } (x-3)^2 + 2^2 = (x+1)^2 + 2^2 \\ \Rightarrow x = 1$$

10. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 - 6a + 13 = 10 \quad \text{즉} \quad a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = 10 \quad \text{즉} \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서

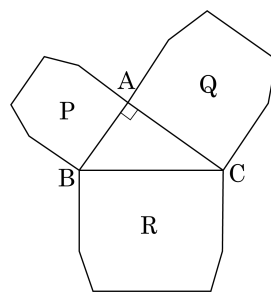
$$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13 \quad \text{즉} \quad 6a = 12$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$$

11. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x , y , z 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



- ① $xy = z$
- <

해설

도형 P,Q,R 가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 도형 P,Q,R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ 이 된다. 그런데 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 따라서, 도형 P,Q,R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

12. 세 점 $A(-1, -1)$, $B(1, -5)$, $C(3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 어떤 삼각형인가?
- ① 이등변삼각형이다.
 - ② 정삼각형이다.
 - ③ $\angle A$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.
 - ④ $\angle B$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.
 - ⑤ 예각삼각형이다

해설

두 점 사이의 거리를 모두 구해본다.

$$\overline{AB} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

$\triangle ABC$ 는 $\angle A$ 가 직각인 직각이등변삼각형

13. 세 점 A(1, 2), B(3, -2), C(-5, -1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형

② 예각삼각형

③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ 에서}$$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

14. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

15. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 △ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

- ① (-1, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (2, -3)
- ④ (-2, 3)
- ⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow$ 수직이등분선
: $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$
 $\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분
선: $y = 2(x - 4) + 1$
두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$
 $\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로
 $\therefore (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.
 $O(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AO} = \overline{CO}$ 에서 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{A}$
 $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} \textcircled{B}$ 에서 교점의 좌표는 (2, -3)

16. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

- ① O(1, -2)
- ② O(2, 2)
- ③ O(2, -2)
- ④ O(2, -1)
- ⑤ O(1, -1)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면
 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2$
 $\therefore 7a - b = 16 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$
 $\overline{OA} = \overline{OC}$, 즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a - 2)^2 + (b - 3)^2$
 $\therefore 2a - b = 6 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 에서 $a = 2, b = -2$
 $\therefore O(2, -2)$

17. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$ 의 외심의 좌표를 (x , y)라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a , 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $a = 5$, ㉡에서 $b = 5$

$\triangle OPQ$ 의 외심을 (x , y)라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

18. $\triangle ABC$ 에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(a , b)라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{2}$$

①, ②를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore \overline{PA} = 5$$

19. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

- ① (2, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (3, -2)
- ④ (2, 2)
- ⑤ (1, -2)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB}$
즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2$
 $\therefore 7a - b = 16 \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{OA} = \overline{OC}$
즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a - 2)^2 + (b - 3)^2$
 $\therefore 2a - b = 6 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 2, b = -2$
 $\therefore O(2, -2)$

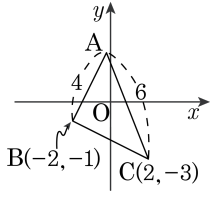
20. 세 점 A(2, 1), B(-4, 3), C(-1, -3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a, b) 라고 할때, $a + b$ 를 구하면?

- ① -2
- ② 3
- ③ 4
- ④ -1
- ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다.
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$ 에서 $3a - b = -5 \dots \textcircled{A}$
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2}$ 에서 $6a + 8b = -5 \dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 를 연립하면
 $a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a + b = -1$

21. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $B(-2, -1)$, $C(2, -3)$ 이고 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 점을 D라 하자. 선분 AD의 길이는?



- ① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점일 때
 $\triangle ABD = \triangle ACD$ 가 되어 넓이를 이등분한다.
 이 때, 점 D의 좌표는 $D\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$
 $\therefore D(0, -2)$
 또, $\overline{BD} = \sqrt{(0+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$ 이고
 점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$ 이 성립한다.
 즉, $4^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + 5)$
 $\overline{AD}^2 + 5 = 26$, $\overline{AD}^2 = 21$
 $\therefore AD = \sqrt{21}$

22. $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

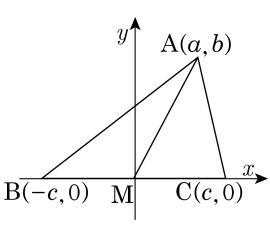
▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM} = 4$, $\overline{AM} = x$ 이므로 중선정리에 의해
 $7^2 + 5^2 = 2(x^2 + 4^2) \therefore x = \sqrt{21}$

23. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 =$ (가)이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나)
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (다) $(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

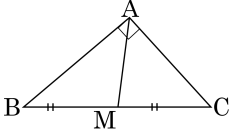
의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
- ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
- ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
- ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
- ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

24. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉠}} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\text{㉡}}^2 \right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$$\boxed{\text{㉡}} = \boxed{\text{㉢}} \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉣}} \left(\boxed{\text{㉤}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2$$

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉤에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① $3, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

② $4, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
- ③ $2, \overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

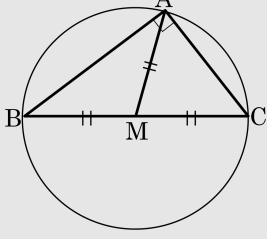
④ $2, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
- ⑤ $\frac{16}{5}, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2 \right)$$

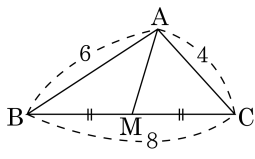
이 때, $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \text{ 이므로 } \boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2 \left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \right) \\ &= \boxed{2} \left(\boxed{\frac{1}{2}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

25. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

26. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$ 가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$$

$$\therefore \overline{BM}^2 = 13$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$$

27. 네 개의 공장 A, B, C, D는 A 공장을 기준으로 B 공장은 정동방향으로 100 m 이동한 다음 정북방향으로 20 m 이동한 지점에, C 공장은 정동방향으로 120 m 이동한 다음 정북방향으로 60 m 이동한 지점에, D 공장은 정동방향으로 40 m 이동한 다음 정북방향으로 80 m 이동한 지점에 있다. 네 개의 공장에서 흘러나오는 폐수를 정화하기 위해 배관시설에 드는 비용을 최소로 하여 정화시설을 만들려고 할 때, 정화시설은 A 공장으로부터 정동방향으로 a m, 정북방향으로 b m인 지점이다. 이때, $a + 2b$ 의 값을 구하면? (단, 각 공장에서 정화시설까지 하수도배관이 묻히는 고도는 무시하여 연결되며 비용은 배관의 길이에 비례한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 160

해설

점 A를 원점으로 하여 공장 B, C, D의 위치를 좌표평면 위에 나타내면 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$$\overline{AP} + \overline{CP} \geq \overline{AC} \text{이고 } \overline{BP} + \overline{DP} \geq \overline{BD}$$

이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP} \geq \overline{AC} + \overline{BD}$$

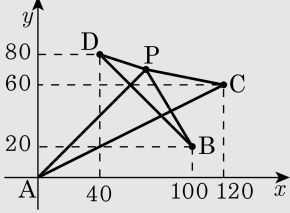
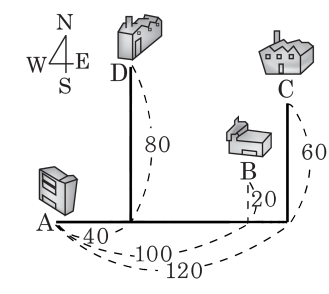
점 P가 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점일 때 각 공장에서 정화시설까지의 거리가 최소이다.

$$\overline{AC} \text{의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x, \overline{BD} \text{의 방정식은}$$

$$y = -x + 120 \text{ 이고, 교점의 좌표는 } (80, 40)$$

$$\text{따라서 } a = 80, b = 40$$

$$\therefore a + 2b = 160$$



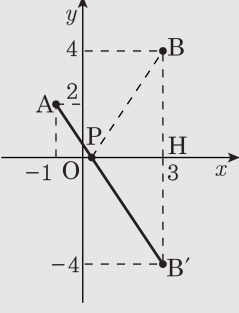
28. 두 점 A (−1, 2) , B (3, 4)에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B' (3, −4)
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소거리는 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B'이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{AB'}$ 이 최소거리이다.

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}$$



29. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 PA + PB 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

해설

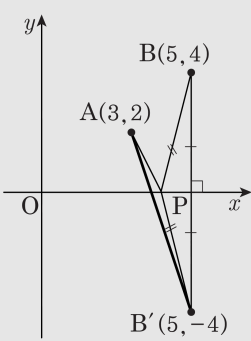
다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 B'(5, -4) 라 하면

$\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



30. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

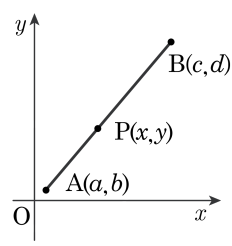
▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

31. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 를 이은 선분 위에 점 $P(x, y)$ 가 있다. $\overline{AB} = 40$ 이고, $5x = 3a + 2c$, $5y = 3b + 2d$ 가 성립할 때, 선분 $\overline{AP}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$5x = 3a + 2c \text{ 이므로 } x = \frac{3a + 2c}{5} = \frac{2c + 3a}{2 + 3}$$

$$5y = 3b + 2d \text{ 이므로 } y = \frac{3b + 2d}{5} = \frac{2d + 3b}{2 + 3}$$

따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

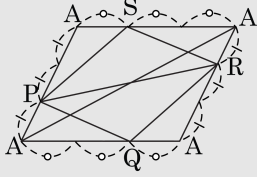
$$\therefore \overline{AP} = \frac{2}{5} \overline{AB} = \frac{2}{5} \cdot 40 = 16$$

32. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. A(-1, 5), B(-4, -1)이고 R(7, 6)일 때, 점 S의 좌표는?

- ① (1, 6)
- ② (1, 7)
- ③ (2, 6)
- ④ (2, 7)
- ⑤ (3, 6)

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.



A(-1, 5), B(-4, -1)이므로 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$$

∴ P(-3, 1)

R(7, 6)이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$$

즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots \text{㉠}$

이 때, 점 D(a, b)로 놓으면

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$ 에서 a = 8

$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$ 에서 b = 8

따라서 점 D(8, 8)이므로

변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 S(2, 6)

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를

C(a, b), D(x, y)로 놓으면

AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}, \frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2} \text{에}$$

서

$x - a = 3 \cdots \text{㉢}$

$y - b = 6 \cdots \text{㉣}$

R(7, 6)이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$ 에서 $a + 2x = 21 \cdots \text{㉤}$

$\frac{2y+b}{3} = 6$ 에서 $b + 2y = 18 \cdots \text{㉥}$

㉢, ㉤을 연립하여 풀면 a = 5, x = 8

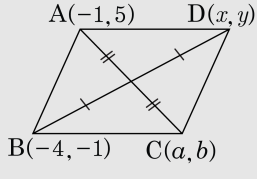
㉣, ㉥을 연립하여 풀면 b = 2, y = 8

∴ D(8, 8)

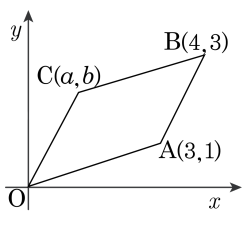
그러므로 변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 S(2, 6)



33. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

34. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(-1, -2), B(6, 4), D(0, 2)이고, $\overline{AB}$ 와 BC가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

- ① C(5, 0) ② C(0, 5) ③ C(7, 8)
④ C(8, 7) ⑤ C(7, 6)

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$-1+a=6, \quad -2+b=6$$

$$\therefore a=7, \quad b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$

35. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2}\right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \text{ 로}$$

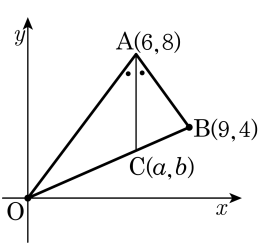
$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3}\right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

36. 다음 그림과 같이 세 점 $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(9, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle AOB$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 $C(a, b)$ 라 할 때, ab 의 값은?



- ① 12 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 18

해설

$\angle OAC = \angle BAC$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$ 가 성립한다.

이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로

점 C 는 $\overline{OB}$ 를 $10:5$,

즉 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

따라서 점 C 의 좌표는

$$C\left(\frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 0}{2 + 1}\right)$$

$$\therefore C\left(6, \frac{8}{3}\right) \quad \therefore ab = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$$

37. 실계수 이차 방정식 $ax^2 + (a + b)x + b = 0$ 이 증근을 가질 때 점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 의 자취의 방정식을 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x^2 (x > 0)$

② $y = \frac{1}{3}x^2 (x > 0)$

③ $y = \frac{1}{4}x^2 (x > 0)$

④ $y = \frac{1}{5}x^2 (x > 0)$

⑤ $y = \frac{1}{6}x^2 (x > 0)$

해설

$ax^2 + (a + b)x + b = 0$ 이 증근을 가지므로

$$D = (a + b)^2 - 4ab = 0, \quad a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0, \quad (a - b)^2 = 0$$

$$\therefore a = b$$

점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 에서 $a^2 + b^2 = x$, $a^2b^2 = y$ 로 놓으면

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 4a^2b^2$$

$$\therefore x^2 = 4y$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $x = a^2 + b^2 > 0$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 \quad (x > 0)$$

38. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.

$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{6}{5}$
- ② $\frac{5}{4}$
- ③ $\frac{4}{3}$
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

39. 일차함수 $\sqrt{3}x - y = 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답: 0

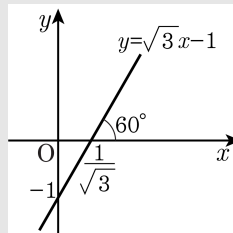
▷ 정답 : 기울기 $\sqrt{3}$

▷ 정답 : y 절편 -1

▷ 정답 : 60 °

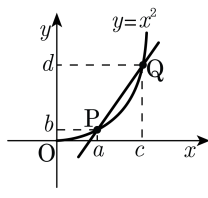
해설

$y = \sqrt{3}x - 1$ 에서
기울기 $\sqrt{3}$, y 절편 -1 , x 축의 양의 방
향과 이루는 각 60°



40. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기는?(단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$



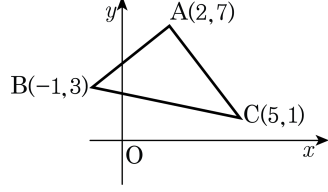
해설

점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$

즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because 0 < a < c$)

$$\begin{aligned} (\overline{PQ} \text{의 기울기}) &= \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a} \\ &= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a} \\ &= c+a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2 \end{aligned}$$

41. 세 점 A(2, 7), B(-1, 3), C(5, 1)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



- ① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$
 ④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로 점A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점(2, 7) 과(2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

42. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

43. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

44. $ab < 0$, $ac > 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0$, $ac > 0$ 이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b 로 나

누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

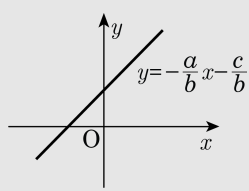
한편, $ab < 0$, $ac > 0$ 이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

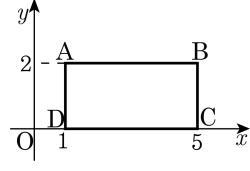
따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.



45. 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?



- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$ 을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심
 $(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2})$ 를 지나야 한다.
 $\Rightarrow 3a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하면, $a = -1, b = 2$
 $\therefore a - b = -3$

46. 두 점 A(2, 5), B(-2, 9)를 지나는 직선에 수직이고, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 8$

② $y = x + 9$

③ $y = x + 10$

④ $y = -x + 7$

⑤ $y = -x + 8$

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{9-5}{-2-2} = -1$

따라서 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 1

또한 선분 AB로 내분하는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$a = \frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{3 + 1} = -1$$

$$b = \frac{3 \cdot 9 + 1 \cdot 5}{3 + 1} = 8$$

따라서 직선의 방정식은 $y - 8 = 1 \cdot (x + 1)$

$$\therefore y = x + 9$$

47. 두 직선 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 과 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 이 서로 수직이 되려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

② $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

③ $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$

④ $a_1a_2 + b_1b_2 = -1$

⑤ $a_1b_1 + a_2b_2 = -1$

해설

(i) $b_1b_2 \neq 0$ 일 때,

두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$ 이다.

두 직선이 수직이 되기 위해서는 기울기의 곱이 -1 이 되어야 하므로

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \times \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1 \text{ 이고,}$$

$$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

(ii) $b_1b_2 = 0$ 일 때,

$$b_1 = 0 \text{ 이면 } a_1x + c_1 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{c_1}{a_1}$$

이 때, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 은

y 축에 수직인 직선 이 되어야 하므로

$a_2 = 0$ 같은 방법으로 $b_2 = 0$ 이면 $a_1 = 0$ 이어야한다.

$$\text{즉, } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

해설

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ 이면, $a_1a_2 = -b_1b_2$ 이므로

$$-\frac{a_1}{b_1} \times -\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ 이다.}$$

$$-\frac{a_1}{b_1}, -\frac{a_2}{b_2} \text{ 는 두 직선의 기울기이고}$$

곱이 -1 이므로 두직선은 수직이다.

따라서 두 직선이 서로 수직이려면

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \text{ 이다.}$$

48. 세 직선 $x + y + 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x - ky - 9 = 0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

- ① $-3 \leq k \leq 3$, $k < -6$ ② $k = 2$, $k = \pm 3$
 ③ $-3 < k < 3$, $k > 6$ ④ $k \neq 2$, $k \neq \pm 3$
 ⑤ $-3 < k$ 또는 $k > 3$

해설

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x - y - 4 = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ 3x - ky - 9 = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점은 $(1, 3)$ 이 $\textcircled{3}$ 위에 있지 않다.

$$\therefore 3 + 3k - 9 \neq 0 \quad \therefore k \neq 2$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-k} \rightarrow k \neq -3$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로,

$$\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{-k} \rightarrow k \neq 3$$

$$\therefore k \neq 2, k \neq \pm 3$$

49. 두 점 A(a , 3), B(4, 5) 를 잇는 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $y = -x + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 7

② 9

③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

i) 수직이등분선의 기울기는 선분 $\overline{AB}$ 의 기울기에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{5-3}{4-a} \times -1 = -1 \quad \therefore a = 2$$

ii) $\overline{AB}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{3+5}{2} = -\frac{4+2}{2} + b \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = 9$$

50. 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

- ① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$
④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$$

$$\therefore (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0 \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로

$$(-1) \times \frac{2k+5}{k-2} = -1$$

$$\therefore k = -7 \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는

직선의 방정식은 $x-y+3=0$

(보충)

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 의

교점을 지나는 직선은

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

51. 두 직선 $2x + y - 7 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x + 5y = 0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{31}$ ② $y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$ ③ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{5}$
④ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{11}$ ⑤ $y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{31}$

해설

$$2x + y - 7 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + 2y - 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} : x = 2, y = 3$$

$$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 교점} : (2, 3)$$

$$\text{구하는 직선의 기울기는 } -\frac{8}{5}$$

$$\left(\because y = -\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다. } \right)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 기울기 } -\frac{8}{5} \text{ 이고}$$

$$(2, 3) \text{ 을 지나므로}$$

$$y - 3 = -\frac{8}{5}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$$

52. 두 직선 $y = -x + 3$, $y = mx + m + 2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

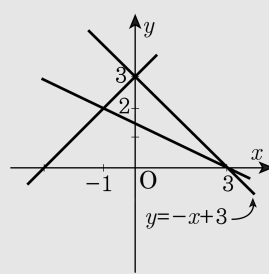
$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1, 2)$ 를 지난다.

$(3, 0)$ 을 지날때 $m = -\frac{1}{2}$

$(0, 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore -\frac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$



53. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

54. 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때,
 $\frac{2a - b}{a + b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$|2a| = |-b|, ab < 0$ 이므로

$$2a = -b, \therefore b = -2a$$

$$\text{따라서, } \frac{2a - b}{a + b} = \frac{2a + 2a}{a - 2a} = \frac{4a}{-a} = -4$$

55. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

56. A(0, -2), B(3, 3), C(4, 0) 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

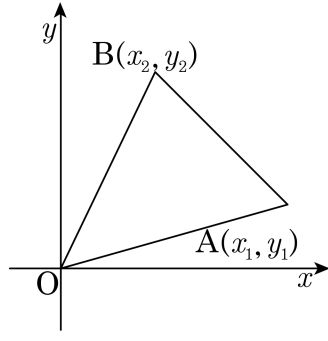
또, 직선 BC의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

A(0, -2)로부터 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$$

57. 원점 $O(0, 0)$ 와 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 넓이는?



- ☒ ① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$
 ☐ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$
 ☐ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
☐ ④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$
 ☐ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$$\therefore y_1x - x_1y = 0$$

점 $B(x_2, y_2)$ 에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$ 까지의 거리 h 는

$$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

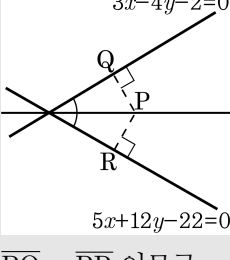
58. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로
 $\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$
 $13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22)$ 또는
 $13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22)$ 정리하면
 $x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
 $\therefore x-8y+6=0$
 $\therefore a+b+c=-1$

59. 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = -x + 2$ 위를 움직일 때 점 $Q(a - b, a + b)$ 의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x = 1$

② $y = 2$

③ $x + y = 2$

④ $x - y = -4$

⑤ $x + y = 0$

해설

$P(a, b)$ 가 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$b = -a + 2 \cdots \text{㉠}$$

$Q(a - b, a + b) = (x, y)$ 라 하면,

$$a - b = x, a + b = y$$

$$\therefore a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{y - x}{2}$$

$$\text{㉠에 대입하면 } \frac{y - x}{2} = -\frac{x + y}{2} + 2$$

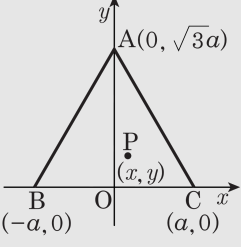
$$\therefore y - x = -(x + y) + 4$$

$$\therefore y = 2$$

60. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
 ④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a,0)$ 이라고 두면, $B(-a,0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2\overline{PA}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{이므로} \\ 2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\} \\ &= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

∴ 직선