1. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\dfrac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

2. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 직선 $y = 2x+b$ 와 원 $x^2+y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$
② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$
③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$
④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$
⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5\left(b^2 - 4\right) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

4. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$과 직선 $y = mx - 3$이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$　　② $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

③ $-1 < m < 1$　　④ $-2 < m < 2$

⑤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots ㉠ \\ y = mx - 3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(m^2 + 1)\,x^2 - 4mx + 3 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3\left(m^2 + 1\right) = m^2 - 3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$

$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2 + (y+1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$

이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서

직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$d = \frac{|1-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} > 1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1} < 2, m^2 < 3$

$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

5. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ ② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$ ④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2$ ⋯⋯㉠
$y=x+2$ ⋯⋯㉡
에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+4(1-a)x+4=0$
$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$
㉠, ㉡이 만나지 않으려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$
$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서
직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면
$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-1<0$ $\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

6. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$　　④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

7. 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5<k<5$ ② $k>5,\ k<-5$ ③ $-5\le k\le 5$
④ $k\ge 5,\ k\ge -5$ ⑤ $0<k\le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$\therefore\ \dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1}}>\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ k>5$ 또는 $k<-5$

8. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

9. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0,\quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : ____________개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선

$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$d=\dfrac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$

이때, $\dfrac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

10. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$ ④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$

$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$

$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

11. 직선 $3x+4y+k=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 만나지 않을 때, 실수 k 값의 범위는?

① $k=-10$
② $k=10$
③ $-10<k<10$
④ $k<-10$ 또는 $k>10$
⑤ $k>10$

해설

직선 $3x+4y+k=0$ 에서 원의 중심 $(0,\ 0)$ 까지의 거리를 d 라 하면

$d=\dfrac{|k|}{5}$ 이다.

원과 직선이 만나지 않을 때, $d>r$ 이므로

$\dfrac{|k|}{5}>2$

$\therefore\ k<-10$ 또는 $k>10$

12. 원 $x^2+y^2=k$ 와 직선 $y=-x+1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k의 값의 범위는? (단, $k>0$)

① $0<k<\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}<k<1$　③ $1<k<\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2}<k<2$　⑤ $k>2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이 r 에 대하여 $d>r$ 이어야 한다.

$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{k}$ (단, $k>0$)

$\therefore 0<k<\frac{1}{2}$

13. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

14. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π　② 6π　③ 8π　④ 9π　⑤ 12π

해설

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

15. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때, a^2+b^2 의 최솟값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과
직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$\therefore \dfrac{|-1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}}=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{1}{4}(ab)^2 \quad \cdots$ ㉠

산술기하 조건에 의해 $a^2+b^2 \geq 2ab$
즉, $a^2+b^2=2ab$ 일 때 최소이다.

㉠에 대입시키면, $2ab=\dfrac{1}{4}(ab)^2$

$\therefore \ ab=8$

$\therefore \ a^2+b^2$ 의 최솟값은 $2ab=16$

16. 다음에서 원과 직선이 접하는 것은?

① $x^2+y^2=4,\ \ x-y+3=0$

② $x^2+y^2=16,\ \ x-y+5=0$

③ $x^2+y^2=5,\ \ 2x-y-5=0$

④ $x^2+y^2=3,\ \ x-2y+3=0$

⑤ $x^2+y^2=4\ ,\ x+y-2=0$

해설

① $(0,\ 0),\ r=2,\ d=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d>r$

② $(0,\ 0),\ r=4\ ,\ d=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d<r$

③ $(0,\ 0),\ r=\sqrt{5},\qquad d=\sqrt{5}$

$\therefore\ r=d$

④ $(0,\ 0),\ r=\sqrt{3},\ d=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ r>d$

⑤ $(0,\ 0),\ r=2,\ d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ r>d$

17. 원 $x^2+y^2-2x-1=0$ 와 같은 중심을 가지고 $x+y+1=0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ 2π　④ 3π　⑤ 4π

해설

$x^2+y^2-2x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=2$

따라서 구하는 원의 중심 : $(1,\ 0)$

반지름은 중심에서 $x+y+1=0$까지의 거리이므로

$\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

∴ 넓이 : 2π

18. 중심이 $C(1,\ 2)$ 이고, 직선 $L\ :\ x+2y=0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

19. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

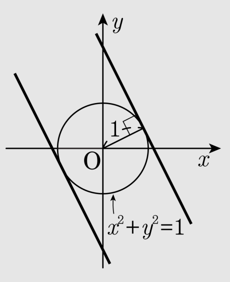
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

20. 원 $x^2 + y^2 = 5$와 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k < -5$ 또는 $k > 5$
② $-5 < k < 5$
③ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > 5$
④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
⑤ $-2 < k < 2$

해설

$x^2 + y^2 = 5$에 $y = 2x + k$를 대입하면

$x^2 + (2x + k)^2 = 5$

$5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이다.

$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5\left(k^2 - 5\right) > 0$

$-k^2 + 25 > 0$

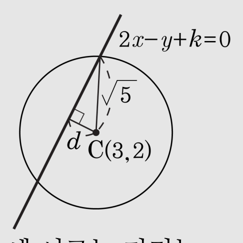
$(k - 5)(k + 5) < 0$

$\therefore -5 < k < 5$

21. 점 $\mathrm{A}(5,3),\ \mathrm{B}(1,1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$　② $-11<k<-1$　③ $-10<k<0$
④ $-9<k<1$　⑤ $-8<k<3$

해설



두 점 $\mathrm{A}(5,3),\ \mathrm{B}(1,1)$ 의 중점이 $(3,2)$ 이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$
점B와 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$
따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$
원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$
원의 중심 $\mathrm{C}(3,2)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 에 이르는 거리는

$$d=\frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5,\ -5<k+4<5$
$\therefore\ -9<k<1$

22. 원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>-2$　② $a \geq -1$　③ $-1 \leq a < 2$
④ $-2 < a \leq 2$　⑤ $-2 \leq a < 3$

해설

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=a+2$
중심이 $(2,\ 1)$ 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.
x 축과 만나려면 $\sqrt{a+2} \geq 1 \cdots$①
y 축과 만나지 않으려면 $0 < \sqrt{a+2} < 2 \cdots$②
①, ②를 동시에 만족하므로
$\therefore\ -1 \leq a < 2$

23. 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $3x+4y+a=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값 중 정수들의 총합을 구하면?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원 중심에서 직선까지 거리가 반지름보다 작아야 한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{|3\times1+4\times(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<1$

$\Rightarrow \quad (a-1)^2-25<0$

$\Rightarrow \quad -4<a<6$

$\therefore$ 정수 $a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

모두 합하면 9

24. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 과 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위를 구하면?

① $k=\sqrt{5}$　② $k=-\sqrt{5}$

③ $k=2\sqrt{5}$　④ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

⑤ $k>\sqrt{5},\ k<\sqrt{5}$

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름보다 작아야 한다.

⇒ 직선과 중심 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}<1$$

⇒ $|k|<\sqrt{5}$

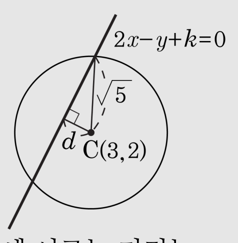
⇒ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

25. 점 A$(5,\ 3)$, B$(1,\ 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $-12 < k < -2$　② $-11 < k < -1$　③ $-10 < k < 0$

④ $-9 < k < 1$　⑤ $-8 < k < 3$

해설



두 점 A$(5,\ 3)$, $B(1,\ 1)$의 중점이 $(3, 2)$이므로 원의 중심의 좌표는$(3, 2)$ 점B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

원의 방정식은$(x-3)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C$(3, 2)$에서 직선 $2x - y + k = 0$에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$|k+4| < 5$, $-5 < k + 4 < 5$

$\therefore\ -9 < k < 1$

26. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$
$\Rightarrow x = -2, \ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점：$(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이：6

27. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|a|}{5}<2=r$

$\dfrac{|a|}{5}<2$, $|a|<10$, $-10<a<10$

$a=-9, -8, -7, -6, \cdots, 6, 7, 8, 9$ ∴ 19 개

28. $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상일 때, r의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2$의 중심은 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 r이고,
원 $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$의 중심은 $\left(1, -2\sqrt{2}\right)$, 반지름의 길이는 1이다.
이 때, 두 원의 중심사이의 거리는
$\sqrt{1^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = 3$이고,
두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상이므로 두 원은 만난다.
즉, $r - 1 \le 3 \le r + 1 \quad \therefore 2 \le r \le 4$
따라서, r의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은 $4 + 2 = 6$

29. 원 $x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2,\ -1)$　② $(3,\ -2)$　③ $(2,\ -2)$
④ $(-1,\ -2)$　⑤ $(3,\ -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면
$a(-6x+2y+20)+(x^2+y^2-10)=0$

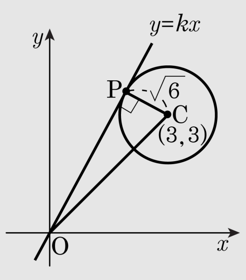
$$\begin{cases} -6x+2y+20=0 \rightarrow y=3x-10\cdots ① \\ x^2+y^2=10\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면
$x^2+(3x-10)^2=10$
$x^2-6x+9=0 \rightarrow (x-3)^2=0$
$\therefore\ x=3,\ y=-1$

30. $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설

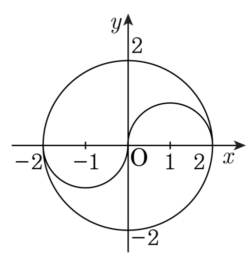


$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 은 중심이$(3,3)$, 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$\mathrm{P}(x,y)$ 에 대하여
$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x}=k$, $y=kx$ 이므로
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y=kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면
$kx-y=0$ 에서 중심 $(3,\ 3)$ 까지의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6}$, $k^2-6k+1=0$

$k=3\pm2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

31. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?



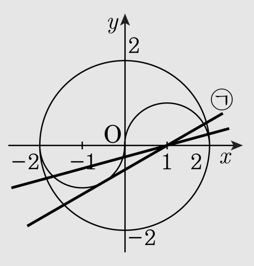
① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$　　② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $0 < a < \frac{2}{3}$　　④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$

⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x-1)$ 의 그래프는 실수 a 의 값에
관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = a(x-1)$,
즉 $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

32. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+y^2=r,\ x+y=r$ 이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2-2rx+r^2-r=0$

$D/4=r^2-2(r^2-r)=0$ 에서

$-r^2+2r=0,$

$\therefore\ r=0,\ 2$

따라서 양수 $r=2$

33. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮,㉯,㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > 0, r > 0) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠,㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α,β라 하면 $\alpha\beta = $ (㉮)
따라서 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = $ (㉯) $\cdot |\alpha\beta| = $ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$$

$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$