1. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a<7$　② $a>9$　③ $6<a\le 9$
④ $6\le a<9$　⑤ $7<a<9$

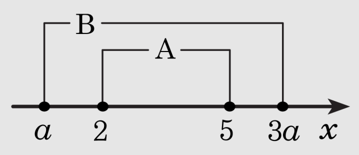
해설
$x^2+2(a-5)x+2(3a-19)>0$ 이므로
이 부등식의 $D<0$ 이다.
$D=(a-5)^2-2(3a-19)=a^2-16a+63<0$
$\therefore 7<a<9$

2. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$ ② $\frac{2}{3} \le a \le 2$ ③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$ ⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2+7x-10 \ge 0$
$x^2-7x+10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2-4ax+3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2$, $3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

3. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 $A(-1,\ -2)$, $B(6,\ 4)$, $D(0,\ 2)$이고, $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① $C(5,\ 0)$　② $C(0,\ 5)$　③ $C(7,\ 8)$
④ $C(8,\ 7)$　⑤ $C(7,\ 6)$

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ C(7, 8)$

4. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3}\ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3\ (\because \ b>0)$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 < 3 \\ x+3 \geq a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 이를 만족하는 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\begin{cases} 2x-1 < 3 \cdots ① \\ x+3 \geq a \cdots ② \end{cases}$ 라 두면,

① : $2x < 4$
$x < 2$

② : $x \geq a-3$
이고, 해가 존재하지 않으려면 $a-3 \geq 2$ 이다.
따라서 $a \geq 5$ 이므로 a 의 최솟값은 5 이다.

6. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45^\circ=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

7. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

8. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{|7\times 3+0\times 4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

9. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2),\ B(-1,\ 2),\ C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $A\ (1\ ,2\ )$에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 $A\ (1\ ,2\ )$에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$
$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = 2$
$\therefore\ \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는
$S = \frac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) -$
$(-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$

10. 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2-2y-3=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-4x+1=0 \cdots\cdots$ ㉡

과 x, y에 대한 방정식

$\left(x^2+y^2-2y-3\right)+k\left(x^2+y^2-4x+1\right)=0$(단, k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉢

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α,β)라고 하면
> (가), (나)(←두 원은 모두 점 (α,β)를 지나므로)이므로
> 임의의 실수 k에 대하여
> (다) (←(α,β)를 ㉢에 대입한 것과 같은 식)이 성립한다.
> 따라서, (라)의 그래프는 k의 값에 관계없이 (마),
> 즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2+\beta^2-2\beta-3=0$

② (나) : $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1=0$

③ (다) : $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α,β)

해설

(α,β) 를 ㉢ 에 대입한 식은 $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+k\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

11. 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y=x-1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

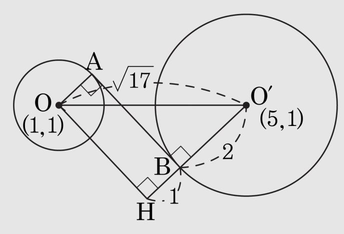
해설

두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$
$2x+(k+2)y-8=0 \cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=x-1$,
즉 $x-y-1=0$ 이 수직이므로
$2\cdot 1+(k+2)(-1)=0 \quad \therefore k=0$

12. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$　　② $\sqrt{7}$　　③ $2\sqrt{2}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

해설



두 원의 중심거리는

$\overline{OO'} = \sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{17}$

$\overline{O'H} = \overline{O'B} + \overline{BH} = \overline{O'B} + \overline{OA} = 2+1=3$ 이므로

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'H}^2} = \sqrt{17-3^2}$

$= 2\sqrt{2}$

따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

13. 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ 이고, 직선 $\mathrm{L}\ :\ x+2y=0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

14. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$ 이므로
$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$
$\Rightarrow x=-2, -8$
$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

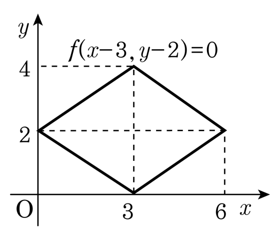
15. 점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(2,\ -1)$ ② $(-1,\ -2)$ ③ $(1,\ 2)$
④ $(-2,\ 4)$ ⑤ $(-1,\ 3)$

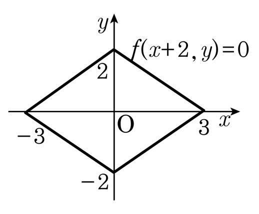
해설

점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$

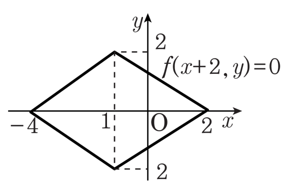
16. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



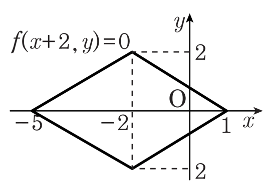
①



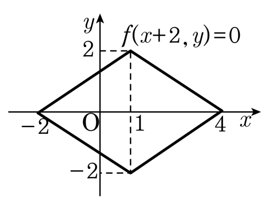
②



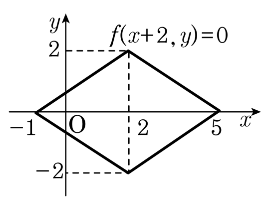
③



④

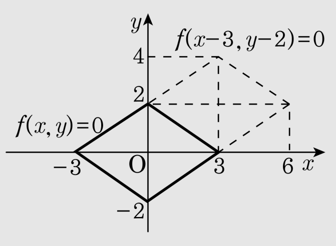


⑤

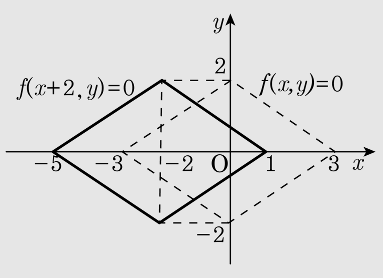


해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



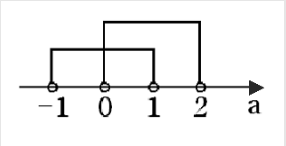
17. $x^2 - 2ax + 1 = 0$, $x^2 - 2ax + 2a = 0$중에서 한 개의 방정식만 허근을 갖도록 양수 a의 범위를 정할 때, $\alpha \le a < \beta$이다. 이때 $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 < 0$에서 $-1 < a < 1$

$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2a < 0$에서 $0 < a < 2$



그림에서 $a > 0$이므로 $1 \le a < 2$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 2$

18. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$을 잇는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

해설

선분 AB를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t\cdot 6+(1-t)\cdot(-2)}{t+(1-t)},\ \frac{t\cdot(-3)+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)=(8t-2, 5-8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

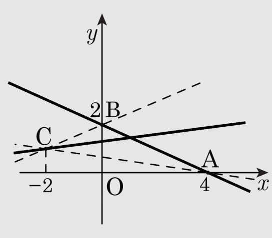
$8t-2>0,\ 5-8t>0$

$\therefore\ \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$

19. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$　② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{6}<k<2$
④ $-\frac{1}{6}<k<1$　⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설



$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠
$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡
㉡ 을 k 에 대하여 정리하면
$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로
k 의 값에 관계없이 정점 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$ 을 지난다.
㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은
그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.
$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$
따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고
$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.
$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

20. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 이 직선 $y=ax+b$ $\cdots$①에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2,1)$ 와 점 $(0,0)$을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

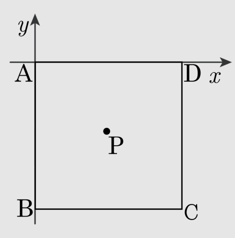
$\therefore\ a=2, b=\frac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

21. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $2\sqrt{2}$

해설



$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$,

$\mathrm{D}(2,\ 0)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고하면 $2 \cdot \overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$ 이므로

$2 \cdot (a^2 + b^2)$

$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$

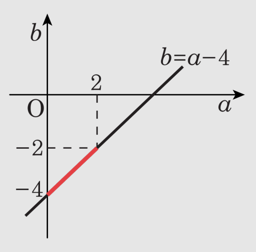
$0 = b - a + 4$

$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b) = (a,\ a-4)$

점 P의 자취는 $b = a - 4\ (0 < a < 2)$ 와 같으므로

구하는 길이는 두 점 $(0,\ -4)$아 $(2,\ -2)$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore\ \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$

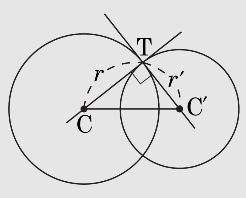


22. 두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+c=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+6x-2y+5=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 교점에서의 접선이 직교할 때 상수 c 의 값은 ?

① -3　　② -2　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

㉠ 에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-c$ 이므로
원 ㉠ 의 중심은 $\mathrm{C}(-1,\ -2)$,
반지름의 길이 $r=\sqrt{5-c}$,
㉡에서 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$ 이므로
원 ㉡ 의 중심은 $\mathrm{C}'(-3,\ 1)$,
반지름의 길이 $r'=\sqrt{5}$
따라서, $\overline{\mathrm{CC}'}^2=13$ 이고 그림에서
$\overline{\mathrm{CT}}^2+\overline{\mathrm{C}'\mathrm{T}}^2=\overline{\mathrm{CC}'}^2$ 이므로
$r^2+r'^2=\overline{\mathrm{CC}'}^2$
$\therefore\ 5-c+5=13$
$\therefore\ c=-3$

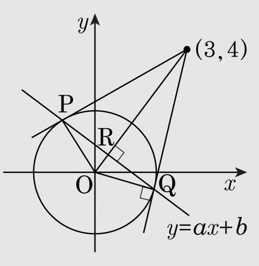


23. 한 점 A$(3, 4)$ 에서 원 $x^2+y^2=4$ 에 접선을 그을 때생기는 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $3x+4y=1$ ② $3x+4y=2$ ③ $3x+4y=3$
④ $3x+4y=4$ ⑤ $3x+4y=5$

해설

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 하면

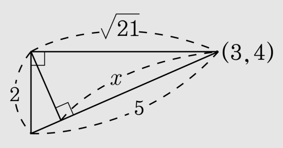


구하고자 하는 직선은 원점과 $(3,\ 4)$ 를 이은 선분에 수직이므로

$\frac{4}{3}\cdot a=-1 \quad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

$y=-\frac{3}{4}x+b,\ 3x+4y-4b=0 \quad \cdots\cdots\ (1)$

접선과의 두 교점을 P, Q 라 할때 다음과 같다.



$y=ax+b$ 와 $(3,\ 4)$ 와 거리가 x 일때,
삼각형의 닮음조건에 의해서

$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

따라서, 원점과 직선과의 거리는

$5-\frac{21}{5}=\frac{4}{5}$

즉, $(0,\ 0)$ 에서 직선 (1) 에 이르는 거리는

$\frac{|-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$

$4|b|=4 \quad b=1 \quad (\because\ b>0)$

$\therefore\ 3x+4y=4$