

1. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$(a+b)x + (2a-3b) < 0$$

$$(a+b)x < 3b-2a$$

$$\Rightarrow x < \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0)$$

$$\Rightarrow a+b = -3(3b-2a)$$

$$\Rightarrow a = 2b, \quad a+b = 3b > 0 \rightarrow b > 0$$

$$(a-3b)x + (b-2a) > 0 \Leftrightarrow -bx - 3b > 0$$

$$bx < -3b$$

$$\therefore x < -3 \quad (\because b > 0)$$

2. 부등식 $2|x+2|+|x-1|\leq 6$ 의 해가 $a\leq x\leq b$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

i) $x < -2$ 일 때
 $-2(x+2) - (x-1) \leq 6$
 $-3x-3 \leq 6, x \geq -3$
 $\therefore -3 \leq x < -2$
ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때
 $2(x+2) - (x-1) \leq 6$
 $2x+4-x+1 \leq 6, x \leq 1$
 $\therefore -2 \leq x < 1$
iii) $x \geq 1$ 일 때
 $2(x+2) + (x-1) \leq 6$
 $2x+x+4-1 \leq 6, x \leq 1$
 $\therefore x = 1$
i) + ii) + iii)에서
 $-3 \leq x \leq 1$
 $\therefore a = -3, b = 1$
 $\therefore ab = -3$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $a(x^2 + 4) \geq 2x(a + 1)$ 이 성립할 때, 실수 a 의 조건은?

- ① $a < -\frac{1}{3}$, $a > 1$ ② $a \leq -\frac{1}{3}$ ③ $a \geq 1$
④ $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ ⑤ $a = 0, 1$

해설

주어진 식을 정리하면

$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4a \geq 0$$

$a = 0$ 일 때 $f(x) = -2x < 0$ 인 부분이 있고,

$a < 0$ 이면 $f(x) < 0$ 인 부분이 있다.

따라서 모든 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$

$$D/4 = (a+1)^2 - 4a^2 \leq 0$$

$$\therefore 3a^2 - 2a - 1 \geq 0$$

$$(3a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1, a \leq -\frac{1}{3}$$

$a > 0$ 이므로 $a \geq 1$

4. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

또

물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

- ① $m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \quad m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \quad m > 2$

④ $m < 2, \quad m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
 $x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
 $D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0,$
 $(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$
 $(3m - 2)(m + 2) > 0$
 $\therefore m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$

5. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \quad \text{을 만족하는 정수 } x \text{의 개수를 구하면?}$$

- ① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

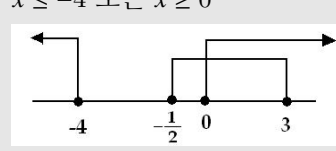
$$(x - 3)(2x + 1) \leq 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

$$x^2 + 4x \geq 0$$

$$x(x + 4) \geq 0$$

$$x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 0$$



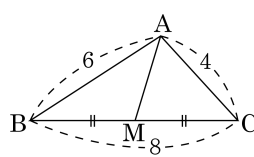
해 : $0 \leq x \leq 3$ $x = 0, 1, 2, 3 \leftarrow$ 정수해

6. $n, n + 5, n + 8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?
- ① 4 ② 6 ③ 7
- ④ 9 ⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서
 $n + (n + 5) > n + 8, n > 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$
둔각삼각형일 조건에서 $n^2 + (n + 5)^2 < (n + 8)^2$
 $n^2 - 6n - 39 < 0, 3 - \sqrt{48} < n < 3 + \sqrt{48} \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 자연수인 n 은
 $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (6 개)

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

8. 두 점 A(-2, 3), B(1, 1)와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

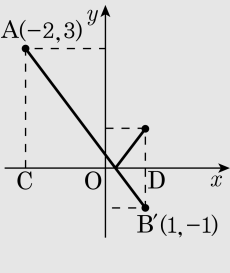
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되려면 점 B와 x축에 대한 대칭점을 B'이라 할 때, 세 점 A, P, B'이 한 직선 위에 있을 때이다. 그림에서처럼 점 B와 x축에 대한 대칭점은 B'(1, -1)이다.

그런데 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되는 것은 세 점 A, P, B'이 한 직선 위에 놓일 때이다. 따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이다.

$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + \{(-1) - 3\}^2}$
 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



9. $\triangle ABC$ 에서 점 $A(1, 5)$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표가 $(-2, 2)$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

- ① $(-1, 3)$ ② $(0, 2)$ ③ $(1, 2)$
④ $(2, -3)$ ⑤ $(2, 3)$

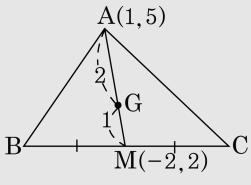
해설

$\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 하고,
 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라 하면
 G 는 $\overline{AM}$ 을 $2:1$ 로 내분하는 점이다.
즉, 무게중심 G 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times (-2) + 1 \times 1}{2 + 1} = -1$$

$$y = \frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2 + 1} = 3$$

따라서 무게중심의 좌표는 $(-1, 3)$ 이다.



10. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.
또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right)$, 즉 (-2, 6)

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 (-2, 6) 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

11. 두 직선 $x - 2y + 3 = 0$, $5x + ky - 2 = 0$ 이 수직일 때와 평행일 때의 k 값들의 곱은?

① -10 ② $-\frac{15}{2}$ ③ -25 ④ 10 ⑤ 25

해설

$$x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$5x + ky - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{k}x + \frac{2}{k}$$

$$\Rightarrow \text{수직} : \frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{k}\right) = -1 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \text{평행} : \frac{1}{2} = -\frac{5}{k} \quad \therefore k = -10$$

$$\therefore \frac{5}{2} \times (-10) = -25$$

12. 세 직선 $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = k \\ kx - 5y = 5 \end{cases}$ 이 한점 $P(a, b)$ 에서 만날 때 $a + b$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3x + y = 7 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x + y = k \cdots \textcircled{2}$$

$$kx - 5y = 5 \cdots \textcircled{3}$$

①과 ②의 교점은 $(7 - k, -14 + 3k)$ 이므로

이를 ③에 대입하면,

$$k^2 + 8k - 65 = 0 \quad \therefore k = 5 \text{ 또는 } -13$$

$$\therefore P(a, b) = (2, 1) \text{ 또는 } (20, -53)$$

$$\therefore a + b \text{ 의 최댓값은 } 2 + 1 = 3$$

13. 두 직선 $2x + 3y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $x + 4y - 4 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -106 ② -105 ③ -104 ④ -103 ⑤ -102

해설

구하는 직선은 $(2x + 3y + 1) + k(x - 2y + 5) = 0$

$\therefore (2 + k)x + (3 - 2k)y + 5k + 1 = 0 \cdots \text{㉠}$

㉠과 직선 $x + 4y - 4 = 0$ 이 수직이므로

$$(2 + k) \cdot 1 + (3 - 2k) \cdot 4 = 0$$

$$14 - 7k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $4x - y + 11 = 0$

$$\therefore y = 4x + 11$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4^2 - 11^2 = 16 - 121 = -105$$

14. 직선 $(2+k)x + (1-2k)y - 3(k+2) = 0$ 은 실수 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P 을 지난다. 점 P 의 좌표는?

- ① $P(3, 0)$ ② $P(0, 3)$ ③ $P(-3, 0)$
④ $P(0, -3)$ ⑤ $P(-3, 3)$

해설

직선 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은
 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지난다.
주어진 직선을 k 에 관해서 정리하면
 $2x + y - 6 + k(x - 2y - 3) = 0$
이것이 k 에 값에 관계없이 성립해야 하므로
 $2x + y - 6 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$
이것을 연립하여 풀면 $x = 3$, $y = 0$
따라서 주어진 직선은 실수 k 의 값에 관계없이 점 $P(3, 0)$ 을
지난다.

15. 두 직선 $ax + by + 1 = 0$, $bx + ay + 1 = 0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

- ① $\frac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\frac{2}{|a|}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \neq \frac{1}{1}$

$\therefore a = -b$ ($\because a \neq b$)

직선 $ax + by + 1 = ax - ay + 1 = 0$ 위의 한 점을

잡으면 $P\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx + ay + 1 = 0$ 에서 $-ax + ay + 1 = 0$ 까지의

$$\text{거리는 } \frac{\left|(-a) \cdot 0 + a \cdot \frac{1}{a} + 1\right|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{|a|}$$

16. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

17. 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3cm, 4cm 이고, 중심거리가 5cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2 ② 3.6 ③ 4.2 ④ 4.8 ⑤ 5.2

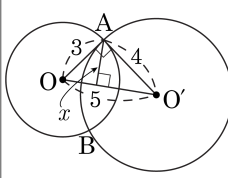
해설

$\triangle AOO'$ 에서 넓이는 6이다.

$$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$$

$$\therefore x = \frac{12}{5}$$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



18. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 9π ⑤ 12π

해설

점 $(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

19. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

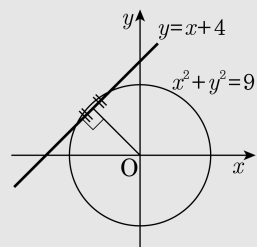
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

20. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

21. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

- (I) 항상 $(0, 1)$ 과 $(-1, 0)$ 을 지난다.
 (II) $x - y + 1 = 0$ 과 $x^2 + y^2 = 1$ 의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할 수 있다.
 (III) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y = x + 1$ 이다.

① I

② II

③ III

④ I, II

⑤ I, III

해설

준 직은 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 과 $x - y + 1 = 0$ 의
교점을 지나는 도형의 방정식이다.
 $m = 0$ 일 때만 $x - y + 1 = 0$ 이 되어
직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도
 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

22. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x - 3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이다. $-ax + b \geq 0$

을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$5x < a + 11, x < \frac{a + 11}{5}$$

$$x - b < 3x - 9, 9 - b < 2x, \frac{9 - b}{2} < x$$

$$\frac{a + 11}{5} = 3 \quad \therefore a = 4$$

$$\frac{9 - b}{2} = 1 \quad \therefore b = 7$$

$a = 4, b = 7$ 을 $-ax + b \geq 0$ 에 대입하여 정리하면

$$-4x + 7 \geq 0$$

$x \leq \frac{7}{4}$ 이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

23. 정수기 판매 사원인 A 는 기본급 80 만 원과 한 달 동안 판매한 정수기 금액의 20% 를 월급으로 받는다. 정수기 한 대의 가격이 30 만 원이라 할 때, A 가 다음 달 월급을 200 만 원 이상 받으려면 최소한 몇 대의 정수기를 팔아야 하는가?

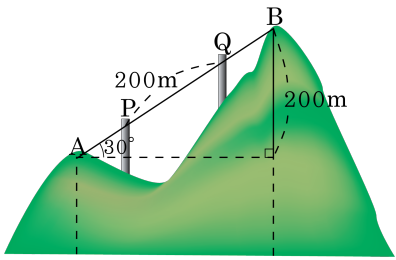
- ① 17대 ② 18대 ③ 19대 ④ 20대 ⑤ 21대

해설

$$80\text{만} + x \times 30\text{만} \times \frac{20}{100} \geq 200\text{만}$$
$$80\text{만} + 6\text{만} \times x \geq 200\text{만}$$
$$6\text{만} \times x \geq 120\text{만}$$
$$x \geq \frac{120\text{만}}{6\text{만}}$$
$$x \geq 20\text{만}$$

x 의 최솟값 : 20

24. 다음 그림과 같이 두 산봉우리 A, B 지점을 직선으로 잇는 케이블을 설치하려고 한다. A, B의 높이 차는 200 m 이고, A 에서 B 를 올려다 본 각은 30° 이다. 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 와 $n : m$ 으로 내분하는 점 Q 에 각각 지지대를 설치했더니, P 와 Q 사이의 거리가 200 m 가 되었다. 이때, $\frac{n}{m}$ 의 값은? (단, 케이블의 늘어짐은 무시한다.)

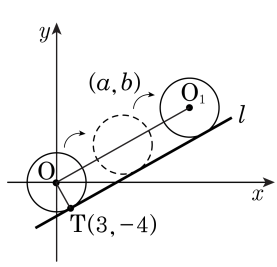


- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{200}{\sin 30^\circ} = 400(\text{m}) \\ \overline{AP} : \overline{PB} &= m : n, \overline{AQ} : \overline{QB} = n : m \text{ 이므로} \\ \overline{AP} &= x \text{ 라 하면} \\ \overline{QB} &= 200 - x \\ \overline{AP} : \overline{PB} &= m : n, \overline{AQ} : \overline{QB} = n : m \text{ 이므로} \\ x : (400 - x) &= (200 - x) : (200 + x) \\ \therefore x &= 100 \\ \overline{AP} : \overline{PB} &= 100 : 300 \\ \therefore \frac{n}{m} &= 3 \end{aligned}$$

25. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O' 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O' 의 중심이 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO' 의 기울기와 같고,

직선 OO' 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a} = (\text{직선 } OO' \text{의 기울기}) = (\text{직선 } l \text{의 기울기}) = \frac{3}{4}$