**1.** $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x<-3$

**해설**

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \to \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

**2.** 부등식 $2|x+2|+|x-1| \leq 6$의 해가 $a \leq x \leq b$일 때, 실수 $a, b$의 곱 $ab$의 값은?

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $0$ ⑤ $2$

해설

i ) $x < -2$일 때

$-2(x+2)-(x-1) \leq 6$

$-3x-3 \leq 6,\ x \geq -3$

$\therefore -3 \leq x < -2$

ii ) $-2 \leq x < 1$일 때

$2(x+2)-(x-1) \leq 6$

$2x+4-x+1 \leq 6,\quad x \leq 1$

$\therefore -2 \leq x < 1$

iii) $x \geq 1$일 때

$2(x+2)+(x-1) \leq 6$

$2x+x+4-1 \leq 6,\quad x \leq 1$

$\therefore x = 1$

i ) + ii ) + iii)에서

$-3 \leq x \leq 1$

$\therefore a = -3,\ b = 1$

$\therefore\ ab = -3$

**3.** 모든 실수 $x$ 에 대하여 $a(x^2+4) \geq 2x(a+1)$ 이 성립할 때, 실수 $a$ 의 조건은?

① $a < -\frac{1}{3},\ a > 1$　　② $a \leq -\frac{1}{3}$　　③ $a \geq 1$

④ $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$　　⑤ $a = 0,\ 1$

**해설**

주어진 식을 정리하면

$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4a \geq 0$

$a = 0$ 일 때 $f(x) = -2x < 0$ 인 부분이 있고,

$a < 0$ 이면 $f(x) < 0$ 인 부분이 있다.

따라서 모든 $x$ 에 대하여 성립하려면 $a > 0$

$D/4 = (a+1)^2 - 4a^2 \leq 0$

$\therefore\ 3a^2 - 2a - 1 \geq 0$

$(3a+1)(a-1) \geq 0$

$\therefore\ a \geq 1,\ a \leq -\frac{1}{3}$

$a > 0$ 이므로 $a \geq 1$

**4.** 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 $m$ 의 범위를 정하면?

① $m < -2,\quad m > \frac{2}{3}$
② $m < -1,\quad m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\quad m > 2$
④ $m < 2,\quad m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\quad m > \frac{2}{3}$

**해설**

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 $m$ 을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\quad m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

**5.** 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \le 0 \\ x^2 + 4x \ge 0 \end{cases}$$ 을 만족하는 정수 $x$의 개수를 구하면?

① 5개　② 4개　③ 3개　④ 2개　⑤ 1개

해설

$2x^2 - 5x - 3 \le 0$

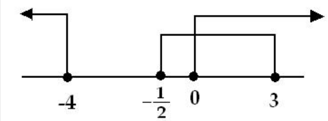
$(x-3)(2x+1) \le 0$

$\rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 3$

$x^2 + 4x \ge 0$

$x(x+4) \ge 0$

$x \le -4$ 또는 $x \ge 0$




해 : $0 \le x \le 3$　$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Leftarrow$ 정수해

**6.** $n$, $n+5$, $n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 $n$ 의 개수는?

① 4　　② 6　　③ 7

④ 9　　⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서

$n+(n+5)>n+8$, $n>3 \cdots\cdots$ ㉠

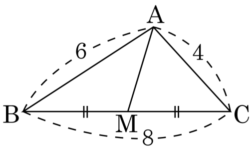
둔각삼각형일 조건에서 $n^2+(n+5)^2<(n+8)^2$

$n^2-6n-39<0$ , $3-\sqrt{48}<n<3+\sqrt{48} \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 자연수인 $n$ 은

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (6 개)

**7.** 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

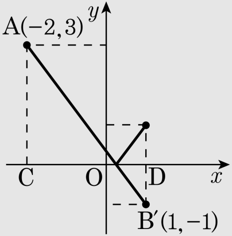
**8.** 두 점 $A(-2,\ 3)$, $B(1,\ 1)$와 $x$축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

**해설**

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되려면 점 B와 $x$축에 대한 대칭점을 $B'$이라 할 때, 세 점 A, P, $B'$이 한 직선 위에 있을 때이다.
그림에서처럼 점 B와 $x$축에 대한 대칭점은 $B'(1,\ -1)$이다.
그런데 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되는 것은 세 점 A, P, $B'$이 한 직선 위에 놓일 때이다.
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$이다.

$$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{(-1)-3\}^2}$$
$$=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

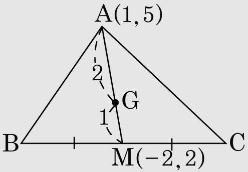


**9.** $\triangle ABC$에서 점 $A(1,\ 5)$이고, $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(-2,\ 2)$일 때, $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 3)$　② $(0,\ 2)$　③ $(1,\ 2)$
④ $(2,\ -3)$　⑤ $(2,\ 3)$

해설

$\overline{BC}$의 중점을 M이라 하고,
$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면
G는 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이다.
즉, 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면




$$x = \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1} = -1$$

$$y = \frac{2\times2+1\times5}{2+1} = 3$$

따라서 무게중심의 좌표는 $(-1,\ 3)$이다.

**10.** 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{0-3}{4-1}=-1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4-2\times1}{1-2},\ \dfrac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로

$y-6=1\cdot(x+2)$, $y=x+8$

$a=1$, $b=8$ $\quad\therefore a+b=9$

**11.** 두 직선 $x-2y+3=0, 5x+ky-2=0$ 이 수직일 때와 평행일 때의 $k$ 값들의 곱은?

① $-10$ ② $-\frac{15}{2}$ ③ $-25$ ④ $10$ ⑤ $25$

해설

$x-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$5x+ky-2=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{k}x+\frac{2}{k}$

$\Rightarrow$ 수직 : $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5}{k}\right)=-1 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ 평행 : $\frac{1}{2}=-\frac{5}{k} \quad \therefore k=-10$

$\therefore \frac{5}{2}\times(-10)=-25$

**12.** 세 직선 $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x+y=k \\ kx-5y=5 \end{cases}$ 이 한점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 만날 때 $a+b$ 의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x+y=7 \quad \cdots ㉠$
$2x+y=k \quad \cdots ㉡$
$kx-5y=5 \cdots ㉢$

㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$ 이므로
이를 ㉢에 대입하면,
$k^2+8k-65=0 \qquad \therefore\ k=5$ 또는 $-13$
$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$
$\therefore\ a+b$ 의 최댓값은 $2+1=3$

**13.** 두 직선 $2x+3y+1=0$, $x-2y+5=0$의 교점을 지나고 직선 $x+4y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a^2-b^2$의 값은?

① $-106$ ② $-105$ ③ $-104$ ④ $-103$ ⑤ $-102$

해설

구하는 직선은 $(2x+3y+1)+k(x-2y+5)=0$

$\therefore (2+k)x+(3-2k)y+5k+1=0 \cdots ㉠$

㉠과 직선 $x+4y-4=0$이 수직이므로

$(2+k)\cdot 1+(3-2k)\cdot 4=0$

$14-7k=0$

$\therefore k=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $4x-y+11=0$

$\therefore y=4x+11$

$\therefore\ a^2-b^2=4^2-11^2=16-121=-105$

**14.** 직선 $(2+k)x+(1-2k)y-3(k+2)=0$은 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P을 지난다. 점 P의 좌표는?

① P$(3,\ 0)$　② P$(0,\ 3)$　③ P$(-3,\ 0)$
④ P$(0,\ -3)$　⑤ P$(-3,\ 3)$

해설

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은
$k$의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지난다.
주어진 직선을 $k$에 관해서 정리하면
$2x+y-6+k(x-2y-3)=0$
이것이 $k$에 값에 관계없이 성립해야 하므로
$2x+y-6=0,\ x-2y-3=0$
이것을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=0$
따라서 주어진 직선은 실수$k$의 값에 관계없이 점 P$(3,\ 0)$을 지난다.

**15.** 두 직선 $ax+by+1=0$, $bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 $a$ 에 대한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\dfrac{2}{|a|}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을

잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의

거리는 $\dfrac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\dfrac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$

**16.** 두 원 $x^2+y^2=1$ , $(x-a)^2+(y-b)^2=4$에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2+b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}=2+1$

$\therefore a^2+b^2=9$

**17.** 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고, 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2　② 3.6　③ 4.2　④ 4.8　⑤ 5.2

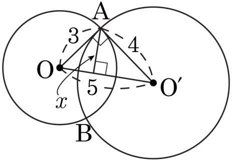
해설

$\triangle AOO'$ 에서 넓이는 6 이다.

$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$

$\therefore x = \frac{12}{5}$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



**18.** 좌표평면에서 점 $(2, -3)$을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$에 접하는 원의 넓이는?

① $4\pi$ ② $6\pi$ ③ $8\pi$ ④ $9\pi$ ⑤ $12\pi$

**해설**

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 $9\pi$

**19.** 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

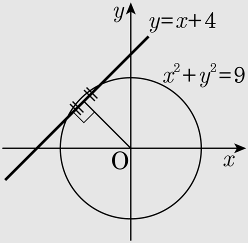
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$




원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

**20.** 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 $a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

**21.** 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $m$ 은 임의의 상수)

| |
|---|
| (Ⅰ) 항상 (0, 1)과 (−1, 0)을 지난다.<br>(Ⅱ) $x-y+1=0$과 $x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다.<br>(Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$이다. |

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅱ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어 직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, $m$ 의 값이 어떤 실수로 주어져도 $x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

**22.** 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x-3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$이다. $-ax + b \geq 0$을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x < a + 11,\ x < \dfrac{a+11}{5}$

$x - b < 3x - 9,\ 9 - b < 2x,\ \dfrac{9-b}{2} < x$

$\dfrac{a+11}{5} = 3 \qquad \therefore\ a = 4$

$\dfrac{9-b}{2} = 1 \qquad \therefore\ b = 7$

$a = 4,\ b = 7$을 $-ax + b \geq 0$에 대입하여 정리하면

$-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \dfrac{7}{4}$이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

**23.** 정수기 판매 사원인 A 는 기본급 80 만 원과 한 달 동안 판매한 정수기 금액의 20% 를 월급으로 받는다. 정수기 한 대의 가격이 30 만 원이라 할 때, A 가 다음 달 월급을 200 만 원 이상 받으려면 최소한 몇 대의 정수기를 팔아야 하는가?

① 17대 ② 18대 ③ 19대 ④ 20대 ⑤ 21대

해설

$$80\text{만} + x \times 30\text{만} \times \frac{20}{100} \geq 200\text{만}$$

$$80\text{만} + 6\text{만} \times x \geq 200\text{만}$$

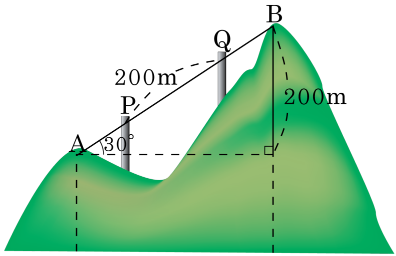
$$6\text{만} \times x \geq 120\text{만}$$

$$x \geq \frac{120\text{만}}{6\text{만}}$$

$$x \geq 20\text{만}$$

$x$ 의 최솟값 : 20

**24.** 다음 그림과 같이 두 산봉우리 A, B 지점을 직선으로 잇는 케이블을 설치하려고 한다. A, B 의 높이 차는 200 m 이고, A 에서 B 를 올려다 본 각은 $30°$ 이다. 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 와 $n : m$ 으로 내분하는 점 Q 에 각각 지지대를 설치했더니, P 와 Q 사이의 거리가 200 m 가 되었다. 이때, $\frac{n}{m}$ 의 값은? (단, 케이블의 늘어짐은 무시한다.)




① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$\overline{AB} = \frac{200}{\sin 30°} = 400(\mathrm{m})$$

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, $\overline{AQ} : \overline{QB} = n : m$ 이므로

$\overline{AP} = x$ 라 하면

$\overline{QB} = 200 - x$

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, $\overline{AQ} : \overline{QB} = n : m$ 이므로

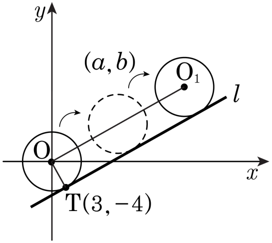
$x : (400 - x) = (200 - x) : (200 + x)$

$\therefore\ x = 100$

$\overline{AP} : \overline{PB} = 100 : 300$

$\therefore\ \frac{n}{m} = 3$

**25.** 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, −4) 에서 직선 $l$ 에 접하고 있다. 직선 $l$ 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O′ 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?




① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　　⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 $l$ 이 점 T(3, −4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 $l$ 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 $l$ 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O′ 의 중심이 $(a, b)$ 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO′ 의 기울기와 같고,

직선 OO′ 과 직선 $l$ 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a}=$ (직선 OO′ 의 기울기)$=$ (직선 $l$ 의 기울기)$=\frac{3}{4}$