

1. 원점에서 직선  $3x - 4y - 5 = 0$  에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0 \times 3 + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

2. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고  $x$  축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여  $\overline{OP}$  의 최댓값은? (단, O 는 원점)

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

이 원의 방정식은  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$

다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면

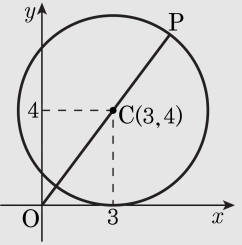
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나

는

두 점 중 한 점을 P 라 할 때,

$\overline{OP}$  가 최대이다.

$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} + 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$



3. 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$  의 한 근이  $1 + 2i$  일 때, 두 실수  $a + b$  의 합  $a + b$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한 근이  $1 + 2i$  이므로 복소수의 켤레근인  $1 - 2i$  도 근이다. 또 다른 근은  $\alpha$  라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

4. 부등식  $|x+1|+|x-2|<5$ 를 만족하는 정수  $x$ 의 개수는?

- ① 0개      ② 1개      ③ 2개      ④ 3개      ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|<5$   
구간을 나누어 부등식을 풀어보면  
i)  $x<-1$ 일 때  
 $-x-1-x+2<5$   
 $x>-2$   
 $\therefore -2<x<-1$  : 정수 없음  
ii)  $-1\leq x<2$ 일 때  
 $x+1-x+2<5$   
 $2<5$  : 항상 성립  
 $\therefore -1\leq x<2$  : 정수  $-1, 0, 1$   
iii)  $x\geq 2$ 일 때  
 $x+1+x-2<5$   
 $x<3$   
 $\therefore 2\leq x<3$  : 정수  $2$   
만족하는 정수  $-1, 0, 1, 2$ 이므로 4개



5.  $1 < x < 3$  에서  $x$  에 대한 이차방정식  $x^2 - ax + 4 = 0$  이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수  $a$  의 값의 범위가  $\alpha < a < \beta$  일 때,  $3\alpha\beta$  의 값을 구하여라.

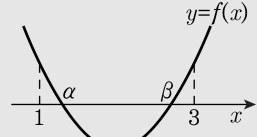
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$  라 하면

$1 < x < 3$  에서  $y = f(x)$  의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



( i )  $x^2 - ax + 4 = 0$  의 판별식을  $D$  라 하면  
 $D = a^2 - 16 > 0$  에서  $(a + 4)(a - 4) > 0$   
 $\therefore a < -4$  또는  $a > 4$

( ii )  $f(1) = 5 - a > 0$  에서  $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$  에서  $a < \frac{13}{3}$

$\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii)  $y = f(x)$  의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$  이므로  $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore 2 < a < 6$

( i ), ( ii ), (iii) 에서  $a$  의 값의 범위는  $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서,  $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$  이므로  $3\alpha\beta = 52$

6. 다음 그림에서  $a$ 와  $b$ 사이의 관계식을 나타내면?

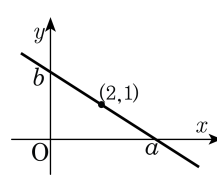
①  $a + \frac{a}{2} = 1$

③  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$

⑤  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} = 1$

②  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$

④  $\frac{2}{a} + b = 1$



해설

$x$  절편이  $a$ ,  $y$  절편이  $b$ 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  이다.

따라서  $(2, 1)$  을 지나므로

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$  이다.

7. O를 원점으로 하는 좌표평면 위의 두 직선  $l_1 : mx - y = 0$ ,  $l_2 : x + my - m - 2 = 0$ 이 있다. 임의의 실수  $m$ 에 대하여 직선  $l_2$ 가 지나가는 정점을 A라 하고, 두 직선  $l_1, l_2$ 의 교점을 P라 할 때,  $\triangle OAP$ 의 넓이의 최댓값은?

- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $\frac{4}{3}$       ③  $\frac{5}{4}$       ④  $\frac{6}{5}$       ⑤  $\frac{7}{6}$

해설

$l_2 : x + my - m - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x - 2 + m(y - 1) = 0$   
 따라서  $l_2$ 는  $m$ 의 값에 관계없이  
 (2, 1)을 지난다.  
 $l_1 : mx - y = 0$ 은  $m$ 의 값에 관계없이  
 원점 O를 지나고 또한  
 $m \cdot 1 + (-1) \cdot m = 0$ 이므로  
 $l_1$ 과  $l_2$ 는 서로 직교한다.  
 따라서 점 P는  $\overline{OA}$ 를 지름으로 하는  
 원 위에 존재하고 이 때, 점 P에서  
 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 길이의 최댓값은  
 곧, 반지름의 길이이므로,  $\triangle OAP$ 의 최댓값은  

$$\triangle OAP \leq \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{1}{4} \overline{OA}^2 = \frac{5}{4}$$

8. 직선  $y = x + 4$ 가 원  $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

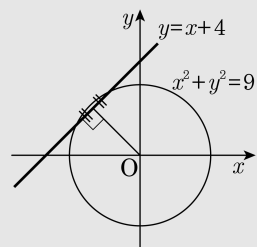
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선  $x - y + 4 = 0$

이므로  $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

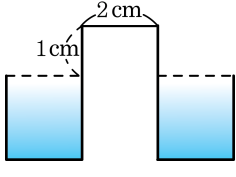


원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는  $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$



9. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇  $\text{cm}^2$  인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ①  $125 \text{ cm}^2$       ②  $288 \text{ cm}^2$       ③  $350 \text{ cm}^2$   
④  $420 \text{ cm}^2$       ⑤  $120 \text{ cm}^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를  $a$ , 가로 길이를  $b$  라 하면  
총길이는  $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$  에서  
 $4a + 2b = 96$   
 $\therefore 2a + b = 48$  이므로  $b = 48 - 2a$   
한 개 단면의 넓이는  $ab$  이므로  
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$   
 $= -2(a^2 - 24a)$   
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$   
 $= -2(a - 12)^2 + 288$   
따라서  $a = 12$  일 때 최대 넓이  $288 \text{ cm}^2$

10.  $x$ 에 관한 부등식  $(a+2b)x+a-b < 0$ 의 해가  $x > 1$ 일 때,  $x$ 에 관한 부등식  $(a-b)x+2a-b > 0$ 을 풀면?

①  $x > \frac{1}{3}$   
④  $x < -\frac{4}{3}$

②  $x < \frac{1}{3}$   
⑤  $x > \frac{7}{3}$

③  $x > -\frac{4}{3}$

해설

$$a+2b < 0, \frac{-(a-b)}{a+2b} = 1$$

$\therefore b = -2a$  이므로

$$(a-b)x+2a-b = a(3x+4) > 0$$

$a > 0$ 을 이용하면

$$\therefore 3x+4 > 0 \therefore x > -\frac{4}{3}$$

11.  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(4, 4)$ 와  $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자.  $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜  $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

①  $(1, 4)$

②  $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③  $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④  $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤  $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여  $(0, 1)$ 과  $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과  $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서,  $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

12. 두 정점  $A(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$  가 있다. 조건  $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$  를 만족시키는 점  $P(x, y)$  의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면,  $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$

점 P 의 자취는 점  $(-3\sqrt{2}, 0)$  을 중심으로 하고, 반지름이 5 인 원이다.

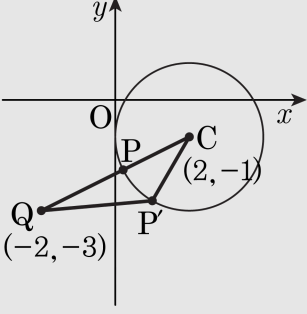


13. 방정식  $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$  이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점  $Q(-2, -3)$  까지의 거리의 최솟값을 구하면?

- ①  $2(\sqrt{2}-1)$ 
 ②  $2(\sqrt{3}-1)$ 
 ③  $2(\sqrt{5}-1)$
- ④  $2(\sqrt{6}-1)$ 
 ⑤  $2(\sqrt{7}-1)$

해설

$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$  에서  
 $(x + (m-1))^2 + (y - m)^2 = -m^2 - 2m + 3$   
 반지름의 길이를  $r$  라고 하면  
 $r^2 = -m^2 - 2m + 3 = -(m+1)^2 + 4$   
 즉,  $m = -1$  일 때,  $r = 2$  로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이  $\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점을 P라 하면,  
 원, C 위의 임의의 점 P'에 대하여  
 $\overline{CP} = \overline{CP'} = 2$  이고  
 $\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} \leq \overline{CP'} + \overline{P'Q}$  이므로  
 $\overline{PQ} \leq \overline{P'Q}$   
 따라서, P가  $\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점일 때,  
 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이다.  
 중 심 (2,-1) 과 점 Q(-2,-3) 까 지 의 거 리 는  
 $\sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$   
 따라서,  $\overline{PQ}$ 의 최솟값은  $2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5} - 1)$

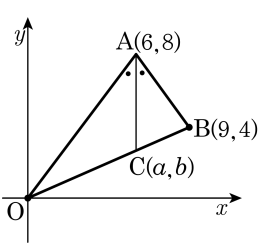
14. 이차방정식  $x^2 - nx + 2n + 1 = 0$ 이 양의 정수근을 두 개 가질 때 두 근과  $n$ 의 값의 합은 ?

① 5                      ② 10                      ③ 15                      ④ 20                      ⑤ 25

해설

$\alpha + \beta = n, \alpha\beta = 2n + 1$ 에서  $n$ 을 소거하여 정리하면  
 $\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta - 1 = 0, (\alpha - 2)(\beta - 2) = 5$   
 $\therefore \alpha - 2 = 1, \beta - 2 = 5$  또는  $\alpha - 2 = 5, \beta - 2 = 1$   
(양의 근이므로 두 곱이  $(-1)(-5)$ 인 경우 제외)  
 $\therefore (\alpha, \beta) = (3, 7), (7, 3)$  이 때  $n = 10$   
 $\therefore \alpha + \beta + n = 20$

15. 다음 그림과 같이 세 점  $O(0, 0)$ ,  $A(6, 8)$ ,  $B(9, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는  $\triangle AOB$ 가 있다.  $\angle A$ 의 이등분선이 변  $OB$ 와 만나는 점을  $C(a, b)$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은?



- ① 12                      ② 14                      ③ 15  
 ④ 16                      ⑤ 18

**해설**

$\angle OAC = \angle BAC$  이므로  $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$ 가 성립한다.

이때,  $\overline{AO} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$  이므로

점  $C$ 는  $\overline{OB}$ 를  $10:5$ ,

즉  $2:1$ 로 내분하는 점이다.

따라서 점  $C$ 의 좌표는

$$C\left(\frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 0}{2 + 1}\right)$$

$$\therefore C\left(6, \frac{8}{3}\right) \quad \therefore ab = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$$