1. 좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -3)$, $C(4,\ 3)$에 대하여 다음 중 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $\overline{CA} < \overline{BC} < \overline{AB}$ ② $\overline{CA} < \overline{AB} < \overline{BC}$

③ $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{CA}$ ④ $\overline{AB} < \overline{CA} < \overline{BC}$

⑤ $\overline{BC} < \overline{AB} < \overline{CA}$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -3)$, $C(4,\ 3)$ 에서

$\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{34}$

$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40}$

$\overline{CA} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$

$\sqrt{26} < \sqrt{34} < \sqrt{40}$ 이므로

$\therefore\ \overline{CA} < \overline{AB} < \overline{BC}$

2. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$
④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(a,2-a)$ 로 놓으면

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2}$
$= \sqrt{2a^2-2a+5}$

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2}$
$= \sqrt{2a^2-6a+9}$

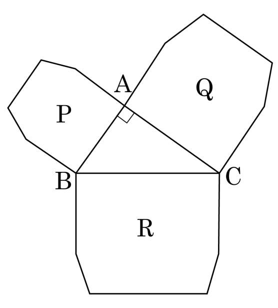
그런데 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5=2a^2-6a+9$

$4a=4$ 에서 $a=1$

$\therefore$ $\mathrm{P}(1,\ 1)$

3. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 $x,\ y,\ z$ 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$ ② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$ ④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ 이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면 $x + y = z$

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ -2)$를 $1\ :\ 2$로 외분하는 점을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

외분점은 $\mathrm{C}\left(\frac{1\cdot 4-2\cdot 1}{1-2},\ \frac{1\cdot(-2)-2\cdot 2}{1-2}\right)$

즉, $\mathrm{C}(-2,\ 6)$이므로 $a+b=-2+6=4$

5. 세 꼭짓점 A$(0, 0)$, B$(-5, 5)$, C$(2, 7)$ 인 $\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 4)$ ③ $(-2,\ 1)$
④ $(2,\ -2)$ ⑤ $(-4,\ -8)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{0+(-5)+2}{3},\ \frac{0+5+7}{3}\right) = (-1, 4)$$

6. 다음 중 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나고 기울기가 2 인 직선의 방정식은?

① $2x+y=7$
② $y=2x+7$
③ $y+3=2(x+2)$
④ $y=2x+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}x+2$

해설

$\therefore\ y=2(x+2)+3=2x+7$

7. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ m)$, $\mathrm{C}(-m,\ -2)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 m의 값은? (단, $m < 0$)

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이므로

$$\frac{m-2}{2-1} = \frac{-2-2}{-m-1}$$

$$m-2 = \frac{4}{m+1},\quad m^2-m-2-4=0$$

$$m^2-m-6=0,\quad (m+2)(m-3)=0$$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=3$

$\therefore m=-2\ (\because m<0)$

8. 다음<보기> 중 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y = 2x + 1$　　㉡ $y = -2(x - 1)$

㉢ $y = -2x + 3$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 $y\ \frac{1}{2}x + 1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

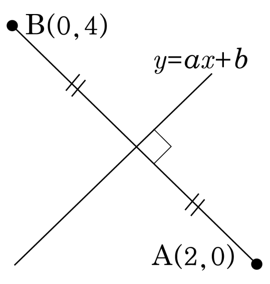
기울기가 -2 인 직선은 ㉡, ㉢이다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y-a^2+4=0 \\ (a+1)x+2y-10=0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 실수 a의 값은?

① -3 ② -1
③ 1 ④ 3
⑤ 존재하지 않는다

해설
주어진 연립방정식의 해가
무수히 많기 위해서는 두 직선
$\frac{a+1}{2}=\frac{2}{1}=\frac{-10}{-a^2+4}$
$\therefore\ a=3$

10. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



① 4　② 2　③ 1　④ −2　⑤ −4

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $\frac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 M 은

$\mathrm{M}(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, 2)$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

11. 두 직선 $x+y+4=0$, $2x-y-1=0$의 교점의 좌표는?

① $(1,\ 3)$ ② $(1,\ -3)$ ③ $(-1,\ 3)$

④ $(-1,\ -3)$ ⑤ $(-3,\ 1)$

해설

두 직선의 방정식으로 이루어진 연립방정식의 해를 좌표로 갖는 점이 두 직선의 교점이다.
두 직선 $x+y+4=0\cdots$㉠, $2x-y-1=0\cdots$㉡을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=-3$
따라서 교점의 좌표는 $(-1,\ -3)$ 이다.

12. 직선 $y = mx - m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 그 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

m 에 관해서 정리하면
$(x-1)m + 2 - y = 0$ 이므로 이것은
m 의 값에 관계없이 두 직선
$x - 1 = 0,\ 2 - y = 0$ 의 교점을 지난다.
$x - 1 = 0$ 에서 $x = 1$, $2 - y = 0$ 에서 $y = 2$
따라서 교점은 $(1, 2)$ 이다.
「$y = mx - m + 2 \Leftrightarrow y - 2 = m(x-1)$」 이므로
공식 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 과 비교해 보면
$(x_1,\ y_1) = (1,\ 2)$ 임을 알 수 있다.
$\therefore a + b = 3$

13. 점 $(2,\ 1)$에서 직선 $y = x + 1$에 이르는 거리는?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$y = x + 1$은 $x - y + 1 = 0$이다.
점$(2,\ 1)$에서 $x - y + 1 = 0$에 이르는 거리는
$\dfrac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

14. 두 점 $A(-1, 4), B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$P=(a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ P=(2, 0)$
$a+b=2$

15. 두 점 A $(-1,\ 2)$, B $(3,\ 4)$ 에 대하여 점 P 가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라 하면 B′ $(3,\ -4)$

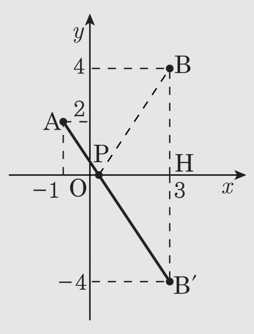
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최소거리는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$ 의 최소 거리와 같고

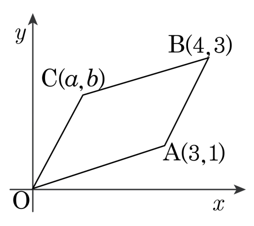
세 점 A, P, B′ 이 직선 위에 있을 때

가장 짧은 $\overline{\mathrm{AB'}}$ 이 최소거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



16. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$에서 $b = 2$

$\therefore a + b = 3$

17. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

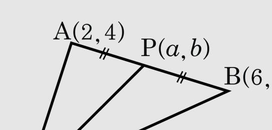
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면

P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $\mathrm{P}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



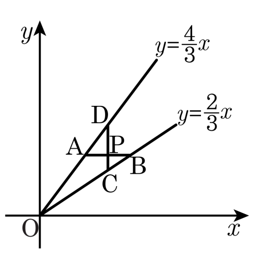
18. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

19. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

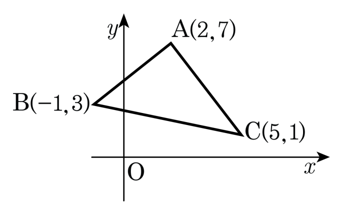
해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{DP}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

20. 세 점 A$(2,\ 7)$, B$(-1\ ,3)$, C$(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$　② $x+y-2=0$　③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$　⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right)$
따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

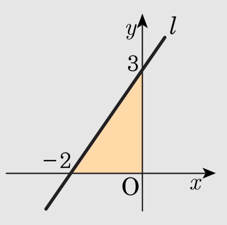
21. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

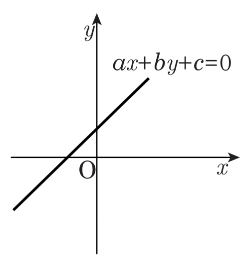
해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

22. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore \ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore \ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx + ay + b = 0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

23. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ 7)$, $C(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle ABC$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

24. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

25. 두 직선 $x+y=1$, $ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots$ ㉠

$ax+2y+a+2=0 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ × 2 : $(a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

$\therefore$ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a}, \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0, \ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0, \ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2, \ a<-1 \ or \ a>2$

$\therefore \ -4<a<-1$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

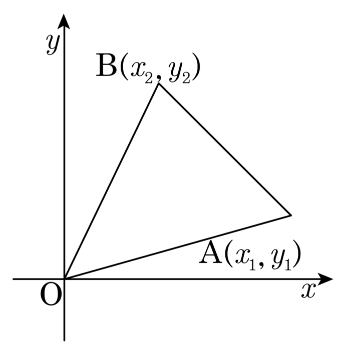
26. 원점을 지나고, 점 (2, 1) 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$ ② $y = -\frac{2}{3}x$ ③ $y = \frac{1}{3}x$
④ $y = -\frac{4}{3}x$ ⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,
(2, 1) 에서의 거리가 1 이므로
$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, $|2k-1| = \sqrt{k^2+1}$, $k(3k-4) = 0$
$k = \frac{4}{3}$ ($\because k \neq 0$)
$\therefore\ y = \frac{4}{3}x$

27. 원점 O(0, 0)와 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB 의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B$(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

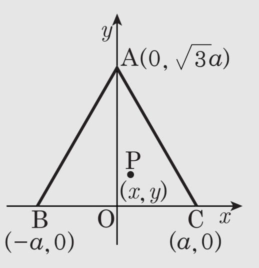
28. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC 에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P 의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC 의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C 의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

29. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

> ㉠ 점 A와 점 B는 x축 위에 있다.
>
> ㉡ 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.
>
> ㉢ $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CD}$

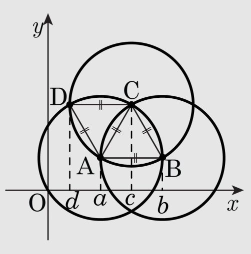
점 A,B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 옳은 것은?

① $a < d < c < b$　② $c < a < d < b$　③ $c < d < a < b$

④ $d < a < c < b$　⑤ $d < c < a < b$

해설

그림에서 알 수 있듯이 점 A, B, C, D 에 대하여 각각의 x좌표 a, b, c, d의 크기는 $d < a < c < b$



30. 두 점 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\mathrm{P}(a, 0)$, $\mathrm{Q}(0, b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심을 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

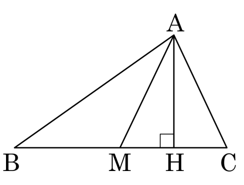
$\therefore\ -10x+25=0,\ -10y+25=0$

$\therefore\ x=y=\dfrac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore\ x+y=5$

31. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{(\text{가})}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM}\cdot\overline{MH} + \boxed{(\text{나})}^2 \cdots ㉠\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC 에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{(\text{다})}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM}\cdot\overline{MH} + \boxed{(\text{라})}^2 \cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

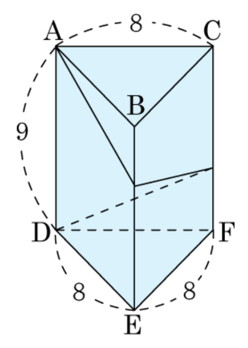
④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

32. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

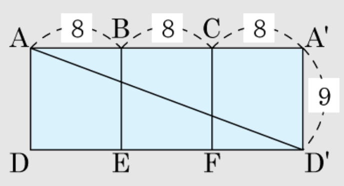


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



33. $A(-1,-1)$, $B(5,-2)$, $C(3,3)$을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 D의 좌표는?

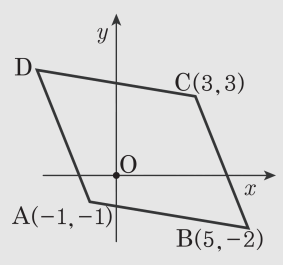
① $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$　② $(1,1)$　③ $(-3,4)$
④ $(8,1)$　⑤ $\left(4,\frac{1}{2}\right)$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로
$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치
$D(x,y)$라 하면
$\overline{AC}$의 중점 : $\left(\frac{-1+3}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(1,1)$
$\overline{BD}$의 중점 : $\left(\frac{5+x}{2},\frac{-2+y}{2}\right)$
$\frac{5+x}{2}=1,\ \frac{-2+y}{2}=1$
$\therefore\ x=-3, y=4$
$\therefore\ D(-3,4)$

해설

B $\rightarrow$ C로 갈 때 x축으로 -2, y축으로 $+5$만큼 이동했으므로
A $\rightarrow$ D로 갈때도 같은 만큼 이동한다.
$\therefore\ D=(-1-2,-1+5)=(-3,4)$



34. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{P}(a, 3)$, $\mathrm{Q}(-2, -2)$, $\mathrm{R}(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

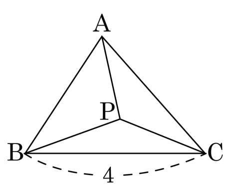
▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\frac{a+3}{3}=2$ 에서 $a=3$
또 $\frac{1+b}{3}=-1$ 에서 $b=-4$
$\therefore\ a+b=-1$

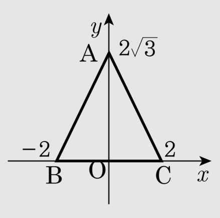
35. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 최솟값은?



① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면
$\mathrm{A}\left(0, 2\sqrt{3}\right), \mathrm{B}(-2, 0), \mathrm{C}(2, 0)$



$\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$
$=x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$
$=3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$
$=3x^2+3\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$은

$x=0, y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

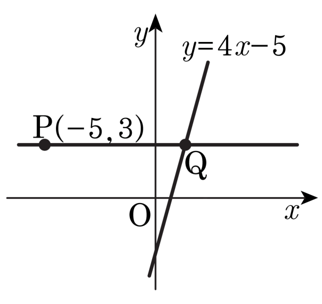
36. 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 3)$, $B(-3,\ 0)$, $C(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 $P(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$
$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$
$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$
따라서 $a = 1,\ b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.
$\therefore\ a + b = 2$

37. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y=4x-5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는?



① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=3$ 이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y=4x-5$에 $y=3$을 대입하면 $3=4x-5$
$\therefore x=2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2-(-5)=7$

38. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0} = \dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a = 7$

39. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(-k, 2)$, $C(k+1, 6)$이 같은 직선 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\frac{2-1}{-k+1} = \frac{6-1}{k+1+1}$

$\Rightarrow \quad \therefore\ k = \frac{1}{2}$

40. 점 $A(2,\ 0)$ 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_1 , 점 $B(-4,\ 0)$ 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_2 라고 할때, 두 직선 l_1 , l_2 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

두 직선 l_1 , l_2 는 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 l_2 위의 한 점 B 와 직선 l_1 사이의 거리와 같다.
직선 l_1 은 직선 $y=2x+1$ 과 수직이고
점$A(2,\ 0)$ 을 지나므로 직선 l_1 의 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\therefore x+2y-2=0$$

따라서, 점 $B(-4,\ 0)$ 과 직선 l_1 사이의 거리는

$$\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

41. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$$3x-y-6=0\ , \quad 3x-y+k=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

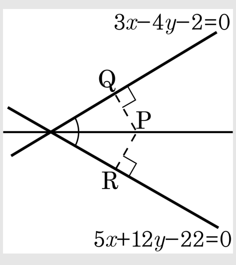
42. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$