1. 복소수 $z = 1+4i$일 때, $\overline{x(2-i)}+y(1-i)=\bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$z=1+4i$이므로 $\bar{z}=1-4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)}+y(1-i) &= \bar{x}(\overline{2-i})+y(1-i)\\ &= x(2+i)+y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i)+y(1-i)=1-4i$
$(2x+y)+(x-y)i=1-4i$
복소수가 서로 같을 조건에서
$2x+y=1,\ x-y=-4$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=3$
$\therefore\ x+y=2$

2. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

3. $a < 0,\ b < 0$ 일 때 다음 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

해설

$a < 0,\ b < 0$ 이므로,

① $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-a}i\sqrt{-b}i$

$= \sqrt{-a}\sqrt{-b}i^2$

$= -\sqrt{-a}\sqrt{-b}$

$= -\sqrt{ab}$

$(\because -a > 0,\ -b > 0)$

따라서, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3b} = \sqrt{a^2 \cdot (ab)}$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{ab}$

$= |a|\sqrt{ab}$

$= -a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{a}} = -\dfrac{b}{\sqrt{a}} = -\dfrac{b\sqrt{a}}{|a|} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

4. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

5. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x - 2)(x + 1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

6. x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+2n=0$이 임의의 실수 k에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 3　② $\frac{7}{8}$　③ $-\frac{2}{3}$　④ $-\frac{7}{8}$　⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$D' = (2k+m)^2 - 4(k^2-k+2n) = 0$

$\Rightarrow \quad m^2+4km+4k-8n=0$

$\Rightarrow \quad 4k(m+1)+m^2-8n=0$

임의의 k에 대해 성립하려면

$m+1=0, \quad m^2-8n=0$

$\Rightarrow \; m=-1,\; n=\frac{1}{8},\; m+n=-\frac{7}{8}$

7. $4x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(3\alpha - 2)(3\beta - 2)$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \beta = \frac{3}{4}$, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(3\alpha - 2)(3\beta - 2) &= 9\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 4 \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 4\end{aligned}$$

8. $4x^2-8x+7$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$
② $(2x+2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$
③ $(x-2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$
④ $(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$
⑤ $\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

해설

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{4}=1\pm\frac{2\sqrt{3}i}{4}=1\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$

$4\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

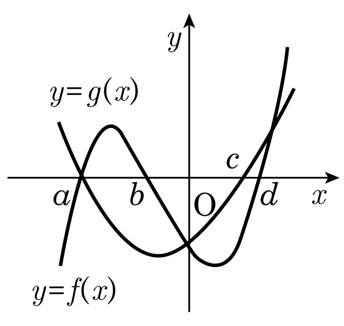
9. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha < \beta)$ 라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.
이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고 x축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$
$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k$, $32 = 4 - 4k$
$\therefore k = -7$

10. 두 개의 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$를 만족하는 것을 고르면?



① a ② a, b ③ a, c
④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x)=0$, $g(x)=0$를 모두 만족하는 것은 a 이다.
($\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2+b^2=0$ 이면
$a=0$ 이고 $b=0$ 이다.)

11. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 ,그 때의 x 의 값을 b 랴 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$y = -(x-2)(x+6)$
$= -(x^2+4x-12)$
$= -(x+2)^2+16$
$x = -2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.
$a = 16,\ b = -2$ 이므로 $a+b = 14$ 이다.

12. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

13. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$
③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$
⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4 - 4x^2 - 12,\quad x^2 = Y$ 라 하자
$\Rightarrow\quad Y^2 - 4Y - 12 = (Y+2)(Y-6) = 0$
$Y = -2$ 또는 $Y = 6$
$\Rightarrow\quad x^2 = -2,\quad x^2 = 6$
$\Rightarrow\quad x = \pm\sqrt{2}i,\quad x = \pm\sqrt{6}$
$\therefore\ x^4 - 4x^2 - 12$
$= (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

14. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$

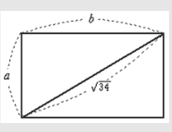
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

16. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

17. 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2-3px+4(q-1)=0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1　② -3 또는 2　③ -2 또는 3
④ -1 또는 4　⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2+\beta^2=3p,\ \alpha^2\beta^2=4(q-1)\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$\therefore\ 3p=p^2-2q\cdots\cdots$ ㉢
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2$
$\therefore\ 4(q-1)=q^2\cdots\cdots$ ㉣
㉣에서 $q^2-4q+4=0,\ (q-2)^2=0$
$\therefore\ q=2$
㉢에 대입하여 정리하면,
$p^2-3p-4=0,\ (p+1)(p-4)=0$
$\therefore\ p=-1,\ 4$

18. $x=1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y=a(x-1)^2-1=ax^2-2ax+a-1$
$a-1=3$, $a=4$
$y=4(x-1)^2-1$
$\therefore apq=4\times1\times(-1)=-4$

19. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답： ______ 초 후

▷ 정답： 4초 후

해설

$y = 40x - 5x^2$
$y = -5(x-4)^2 + 80$
$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

20. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$
$\alpha^2+3\alpha+p=0$
$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$
$\alpha=1 \ or \ p=3$
$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$
$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore \ p=-4$
$\therefore \ \alpha-p=1-(-4)=5$