

1. 복소수 $z = 1 + 4i$ 일 때, $\overline{x(2-i) + y(1-i)} = \bar{z}$ 가 성립하도록 하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 복소수 z 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$z = 1 + 4i$ 이므로 $\bar{z} = 1 - 4i$ 이다.

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i) + y(1-i)} &= \overline{x(2-i)} + \overline{y(1-i)} \\ &= x(2+i) + y(1-i)\end{aligned}$$

$$\therefore x(2+i) + y(1-i) = 1 - 4i$$

$$(2x + y) + (x - y)i = 1 - 4i$$

복소수가 서로 같을 조건에서

$$2x + y = 1, x - y = -4$$

위 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1, y = 3$

$$\therefore x + y = 2$$

2. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$ 에 대하여 $\alpha + \bar{\beta} = \overline{3 - 2i}$ 를 만족하는 실수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$$\alpha + \bar{\beta} = \overline{3 - 2i}$$

$$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$$

$$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$$

$$\therefore a = -2, b = -4$$

$$\therefore a + b = -6$$

3. $a < 0, b < 0$ 일 때 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3 b} = -a \sqrt{ab}$

③ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{b \sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$

해설

$a < 0, b < 0$ 이므로,

$$\begin{aligned}\text{① } \sqrt{a} \sqrt{b} &= \sqrt{-a} \sqrt{-b} i \\ &= \sqrt{-a} \sqrt{-b} i^2 \\ &= -\sqrt{-a} \sqrt{-b} \\ &= -\sqrt{ab}\end{aligned}$$

($\because -a > 0, -b > 0$)

따라서, $\sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

$$\begin{aligned}\text{② } \sqrt{a^3 b} &= \sqrt{a^2 \cdot (ab)} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{ab} \\ &= |a| \sqrt{ab} \\ &= -a \sqrt{ab}\end{aligned}$$

$$\text{③ } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{④ } \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{|b|}{\sqrt{a}} = -\frac{b}{\sqrt{a}} = -\frac{b \sqrt{a}}{|a|} = \frac{b \sqrt{a}}{a}$$

$$\text{⑤ } \sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$$

4. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x-1)(x+3) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -3$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

5. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라.
(단, m 은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2이므로

$x = 2$ 를 대입하면

$$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$ 이다.

이 방정식을 풀면

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

이므로 다른 한 근은 -1이다.

6. x 에 대한 이차방정식 $4x^2 + 2(2k + m)x + k^2 - k + 2n = 0$ 이 임의의 실수 k 에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$$D' = (2k + m)^2 - 4(k^2 - k + 2n) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4km + 4k - 8n = 0$$

$$\Rightarrow 4k(m + 1) + m^2 - 8n = 0$$

임의의 k 에 대해 성립하려면

$$m + 1 = 0, \quad m^2 - 8n = 0$$

$$\Rightarrow m = -1, \quad n = \frac{1}{8}, \quad m + n = -\frac{7}{8}$$

7. $4x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(3\alpha - 2)(3\beta - 2)$ 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}, \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$(3\alpha - 2)(3\beta - 2) = 9\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 4$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 4$$

8. $4x^2 - 8x + 7$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(2x - 2 - \sqrt{3}i)(2x - 2 + \sqrt{3}i)$

② $(2x + 2 - \sqrt{3}i)(2x - 2 + \sqrt{3}i)$

③ $(x - 2 - \sqrt{3}i)(x + 2 + \sqrt{3}i)$

④ $(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$

⑤ $\left(x - \frac{2 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}i}{2}\right)$

해설

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{4} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}i}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$4 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= (2x - 2 - \sqrt{3}i)(2x - 2 + \sqrt{3}i)$$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8

② -7

③ -6

④ -5

⑤ -4

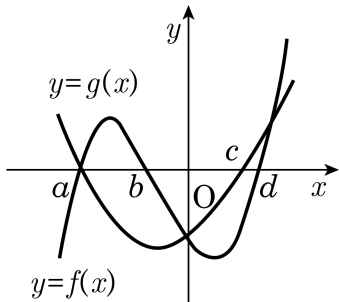
해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.

이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고 x 축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서 } (4\sqrt{2})^2 = (-2)^2 - 4k, 32 = 4 - 4k \\ \therefore k = -7$$

10. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?



① a

② a, b

③ a, c

④ a, b, d

⑤ a, b, c, d

해설

$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because \text{실수 } a, b \text{ 에 대하여 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 이면}$
 $a = 0 \text{ 이고 } b = 0 \text{ 이다.})$

11. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 ,그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned}y &= -(x-2)(x+6) \\&= -(x^2 + 4x - 12) \\&= -(x+2)^2 + 16\end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.

$a = 16$, $b = -2$ 이므로 $a+b = 14$ 이다.

12. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = -3$ 을 풀면?

① $x = \pm 2$ 또는 $x = 2 \pm 3\sqrt{6}$

② $x = \pm 4$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

③ $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

④ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

⑤ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}i}{2}$

해설

$$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = -3 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3) + 3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6) + 3 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + x = t \text{로 치환하면}$$

$$(t-2)(t-6) + 3 = t^2 - 8t + 12 + 3$$

$$= t^2 - 8t + 15$$

$$= (t-3)(t-5) = 0$$

$$\text{따라서 } (x^2 + x - 3)(x^2 + x - 5) = 0$$

$$x^2 + x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + x - 5 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

13. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

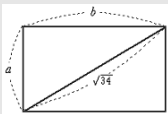
$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

14. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\text{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 2m 씩 늘였더니, 넓이가 20m^2 만큼 늘어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

- ① 가로의 길이: 3m, 세로의 길이: 5m
 ② 가로의 길이: 5m, 세로의 길이: 3m
 ③ 가로의 길이: 3m, 세로의 길이: 5m 또는 가로의 길이: 5m, 세로의 길이: 3m
 ④ 가로의 길이: $(3\sqrt{6} - 2)\text{m}$, 세로의 길이: $(3\sqrt{6} - 2)\text{m}$
 ⑤ 가로의 길이: $\sqrt{3}\text{m}$, 세로의 길이: $\sqrt{5}\text{m}$

해설



$$a^2 + b^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$$

$$(a + 2)(b + 2) = ab + 20$$

$$ab + 2(a + b) + 4 = ab + 20$$

$$\therefore a + b = 8$$

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 64 - 34 = 30$$

$$\therefore ab = 15 \quad b = 8 - a$$

$$a \cdot (8 - a) = 15 \rightarrow (a - 5)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3, b = 5 \text{ 또는 } a = 5, b = 3$$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

16. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

17. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. α^2, β^2 이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$ 의 두 근일 때, p 의 값은?

- ① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
 ④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3p, \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\therefore 3p = p^2 - 2q \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$$

$$\therefore 4(q-1) = q^2 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉣} \text{에서 } q^2 - 4q + 4 = 0, (q-2)^2 = 0$$

$$\therefore q = 2$$

㉢에 대입하여 정리하면,

$$p^2 - 3p - 4 = 0, (p+1)(p-4) = 0$$

$$\therefore p = -1, 4$$

18. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$y = a(x - 1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$$

$$a - 1 = 3, a = 4$$

$$y = 4(x - 1)^2 - 1$$

$$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$$

19. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.



답:

초 후



정답: 4초 후

해설

$$y = 40x - 5x^2$$

$$y = -5(x - 4)^2 + 80$$

$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

20. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2 + px + 3 = 0$, $x^2 + 3x + p = 0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha - p$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p - 3) - (p - 3) = (\alpha - 1)(p - 3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$p = 3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha = 1$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$