1. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로

두 허근 α, β는

각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$
④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서
$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$
i) $x = y$ 일 때
$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
$x = \pm 2,\ y = \pm 2$
ii) $x = 2y$ 일 때
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$
$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를 $x = a,\ y = b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3,\ xy = 2$

$\therefore \quad ab = 2$

5. $x^3-2x^2-5x+6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=-2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 으로 놓으면
$f(1)=1-2-5+6=0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-5x+6 &=(x-1)(x^2-x-6) \\ &=(x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

7. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 해의 합은 0

8. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

9. 0이 아닌 실수 x, y가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a$, $y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0$, $y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a$, $y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1$, $x=\pm1$

10. 방정식 $x^2-2xy+y^2+|x+y-2|=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x-y)^2+|x+y-2|=0$

이 때, $(x-y)^2 \geq 0$, $|x+y-2| \geq 0$이므로

㉠이 성립하려면 $x-y=0$, $x+y-2=0$이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

$\therefore\ xy=1$

11. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

12. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$을 대입하면
$1 = 0$이 되어 모순이므로 $x \neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$로 놓으면
$X^2 + 5X - 14 = 0$, $(X + 7)(X - 2) = 0$
$\therefore X = -7$ 또는 $X = 2$
(i) $X = -7$일 때,
$x + \frac{1}{x} = -7$에서
$x^2 + 7x + 1 = 0$

$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X = 2$일 때,
$x + \frac{1}{x} = 2$에서
$x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$
$\therefore x = 1$
(i), (ii)로부터

$x = 1$(중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$이다.

13. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ \ b=8-2k,\ \ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ \ a=2,\ \ b=0$

14. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α,β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

15. α는 허수이고 $\alpha^3=-1$ 일 때, $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n=0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n=0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha)=0,$
$1-\alpha^{n+1}=0$
$\therefore \alpha^{n+1}=1$
한편, $\alpha^3=-1$이므로
$\alpha^6=1$
$\therefore\ n+1=6k(k=1,2,3,\ldots)$
$\therefore\ k=11$일 때 $n=65$가 될 수 있다.

16. x, y에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} kx+(1-k)y=2k+1 \\ akx+(k+1)y=b+4k \end{cases}$$

가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$kx+(1-k)y=2k+1$ ⋯⋯ ㉠

$akx+(k+1)y=b+4k$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $(x-y-2)k+(y-1)=0$

$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$

$\therefore\ x=3,\ y=1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(3a-3)k+(1-b)=0$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

17. 두 방정식 $x^2-(k+2)x+2k=0$, $x^2+kx-2k=0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재할 때, 상수 k의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통인 근을 α라 하면

$\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$

$\alpha^2+k\alpha-2k=0$

두 식을 더하면

$2\alpha^2-2\alpha=0,\quad \alpha(\alpha-1)=0$

$\alpha=0$ 이면 $k=0$

$\alpha=1$ 이면 $k=1$

$\therefore\quad k=1$ 또는 0

해설

㉠ : $x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$

㉡ : $x^2+kx-2k=0$

i) $x=k$ 가 ㉡의 해일 때

$k^2+k^2-2k=0,$

$k^2-k=0$

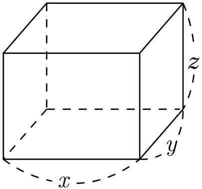
$k=1$ 또는 $k=0$

ii) $x=2$가 ㉡의 해일 때

$4+2k-2k=0,\ 4=0$ 성립하지 않는다.

$\therefore\quad k=1$ 또는 0

18. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=8 \Rightarrow x+y+z=24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12}-8^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=204$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{186}{3}=62$$

19. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2-5(2x^2+6x+9)\\ &= -9x^2-18x-9=-9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

20. 삼차방정식 $x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}=0$의 세 근을 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때,$\alpha\le m\le\gamma$인 정수 m의 개수를 구하면?

① 23 개 ② 24 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3\le m\le 2^5$

$\therefore$ 정수 m의 개수는 $2^5-2^3+1=25$

21. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$의 세 근이 모두 정수일 때, p의 값을 구하면?

① 4　　② -3　　③ -2　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\alpha\beta\gamma = -2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢에서

$-2 = (-1)\times1\times2 = 1\times1\times(-2) = (-1)(-1)(-2)$

㉠에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$

㉡에서 $p = 1\times1 + 1\times(-2) + (-2)\times1 = -3$

22. 다음과 같은 식의 변형을 이용하여 알 수 있는 것은? (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수를 나타낸다.)

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d}=\overline{az}^3+\overline{bz}^2+\overline{cz}+\overline{d}$$
$$=\overline{az}^3+\overline{b}\overline{z}^2+\overline{cz}+\overline{d}$$
$$=\overline{a}(\overline{z})^3+\overline{b}(\overline{z})^2+\overline{c}(\overline{z})+\overline{d}$$

① z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

② z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

③ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근과 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근은 같다.

④ $\overline{z}$ 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

⑤ $\overline{z}$ 가 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

해설

z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면,
$az^3+bz^2+cz+d=0$
$\overline{ax^3+bz^2+cz+d}$
$=\overline{az}^3+\overline{bz}^2+\overline{cz}+\overline{d}$
$=\overline{a}(\overline{z})^3+\overline{b}(\overline{z})^2+\overline{c}(\overline{z})+\overline{d}$
$=0$ 이므로
$\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

23. 서로 다른 세 복소수 $a,\ b,\ c$ 가 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 을 만족할 때, $\frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a+b+c=0,\ a+b=-c \quad \cdots$ ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ②

②에서 $ab=-c(a+b) \leftarrow$ ①대입

$\therefore\ ab=c^2 \leftarrow$ ㉠

마찬가지로

$bc=a^2-$㉡, $ca=b^2-$㉢

㉢ ÷ ㉡ : $\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^2,\left(\frac{b}{a}\right)^3=1$

㉡ ÷ ㉠ : $\frac{c}{a}=\left(\frac{a}{c}\right)^2,\left(\frac{a}{c}\right)^3=1$

즉, $\frac{b}{a},\frac{a}{c}$ 는 $t^3=1,(t-1)(t^2+t+1)=0$ 의 근이고 a,b,c 가 서로 다른 수이므로

$\frac{b}{a},\frac{a}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 근이다.

또한 ㉡에서 $bc=a^2$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$\therefore\ \frac{b}{a}$ 와 $\frac{\overline{a}}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 서로 다른 두 근

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}=-1$ (두 근의 합)

24. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개　② 3개　③ 5개　④ 7개　⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x,
25초 광고의 개수를 y라 할 때
11개의 광고들 사이의 간격은 10×1(초) $= 10$(초)
총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270$(초)이다.
$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260$(초)

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3,\ y = 8$
따라서 20초 광고는 3개이다.

25. A, B, C, D 네 명이 서로 네 번씩 바둑을 두어 각 대국의 결과마다 승자에게 2점, 패자에게 0점, 무승부일 때는 두 명 모두에게 1점씩을 준다. 대국의 결과가 다음 표와 같을 때, D가 얻은 점수를 구하면?

	승	무	패	점수
A	6	1	5	13
B	5	3	4	13
C	8	2	2	18
D	?	?	?	x

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

D가 a승 b무 c패를 했다고 하면

$a+b+c=4\cdot 3=12$ ······㉠

네 명이 모두 승수와 패수가 같아야 하므로

$6+5+8+a=5+4+2+c$

$\therefore\ c=a+8$ ······㉡

또, 무승부의 합은 항상 짝수이므로 b는 짝수이어야 한다.

㉠, ㉡에서 $2a+b=4$이고

$b=0$일 때 $a=2$, $b=2$일 때 $a=1$,

$b=4$일 때 $a=0$이므로

어느 경우에나 D가 얻은 점수는 4점이다.