1. 두 점 A(1, 5), $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$ ④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$
⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,
$\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.
또, 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

2. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$　　② $(-2, 3)$　　③ $(2, -3)$
④ $(-2, -3)$　　⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$
$\therefore a - b - c = 2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$
$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2 + 6a + c = 0$
$\therefore 6a + c = -36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a = -4,\ b = 6,\ c = -12$
즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

3. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

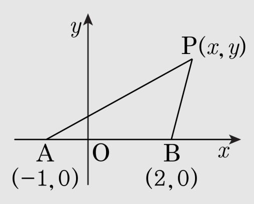
해설

원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ⋯⋯⋯⋯ ㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ⋯⋯⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$일 때 $b = 4$, $a = 10$일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

4. 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

5. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x+y+5=0$ ② $-2x+y-3=0$

③ $x-y+5=0$ ④ $x+2y+5=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x+y_1y=r^2$을 이용하면,

$1\cdot x+2\cdot y=5 \quad \therefore\ x+2y-5=0$

6. 다음<보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

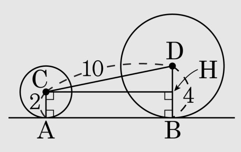
해설

주어진 방정식을 정리하면,
$(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k$ 이다.
$y = 0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2 = 1 - k$
$\Rightarrow$ $k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.
㉣ $x = 0$ 를 대입 후 정리하면,
$(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$
$\therefore$ $k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.
㉤ 중심이 $y = x$ 위에 있지 않으므로
x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.
$\therefore$ (㉠,㉣,㉤) 가 참이다.

7. 두 원 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$, $(x-5)^2+(y-4)^2=16$ 과 두 원의 공통외접선의 교점을 각각 A, B 라 하고, 두 원의 중심을 각각 C, D 라고 할 때, 사각형 CABD 의 넓이는?

① $10\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{6}$ ④ $12\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{6}$

해설



두 원의 중심의 좌표는 각각
C $(-3,-2)$, D $(5,4)$ 이므로
$\overline{CD}=\sqrt{(5+3)^2+(4+2)^2}=10$
다음 그림과 같이 점 C 에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면
$\overline{DH}=4-2=2$ 이므로
$\overline{CH}=\sqrt{100-4}=4\sqrt{6}$
$\therefore \overline{AB}=\overline{CH}=4\sqrt{6}$
따라서, 사각형 CABD는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times(4+2)\times 4\sqrt{6}=12\sqrt{6}$

8. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

9. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 에 직선 $y=mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$x^2+y^2+6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=4$
이것은 중심이 $(-3,\ 2)$,
반지름의 길이가 2 인 원이다.
이 원에 직선 $y=mx$ 가 접하므로
원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx-y=0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.

즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$|-3m-2|=2\sqrt{m^2+1}\cdots$ ㉠
㉠ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2+12m=0 \quad \therefore\ m=0,\ -\frac{12}{5}$

따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

10. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9, -8, -7, -6, \cdots, 6, 7, 8, 9$ $\therefore$ 19 개

11. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

12. 직선 $3x - y - 1 = 0$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y = mx \pm n$ 이라고 할 때, mn 의 값은?

① $3\sqrt{10}$　　② $-3\sqrt{10}$　　③ 30

④ -30　　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x - y - 1 = 0$, 즉 $y = 3x - 1$ 에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.
공식을 이용하면 접선의 방정식은
$y = 3x \pm \sqrt{10}\sqrt{1 + 3^2}$, $y = 3x \pm 10$ 이므로
$m = 3,\ n = 10\ \ \therefore mn = 30$

13. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2}, -2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

14. 점 $A(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 2　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$, $a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

15. 두 정점 $A(-3,\ 0)$, $B(3,\ 0)$ 과 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 $P(a,\ b)$ 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$　② $\frac{5}{2}\pi$　③ $\frac{4}{3}\pi$　④ $\frac{10}{3}\pi$　⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 $P(a,\ b)$ 는 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위에 있으므로

$a^2+b^2-8b-9=0 \cdots$ ㉠

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$ 라고 하면,

$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$

$\therefore\ a=3x,\ b=3y$

이것을 ㉠에 대입하면,

$(3x)^2+(3y)^2-8(3y)-9=0$

$\therefore\ x^2+y^2-\frac{8}{3}y=1$

$x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

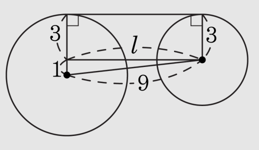
$\therefore\ r=\frac{5}{3}$

$\therefore\ l=2\pi r=2\times\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$

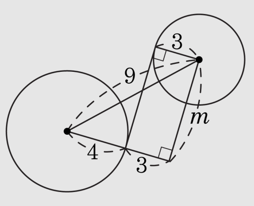
16. 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-9)^2+y^2=9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, l^2-m^2 의 값은?

① 48 ② -48 ③ 32 ④ -32 ⑤ 30

해설



중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.
$\therefore\ l^2 = 9^2 - 1^2$



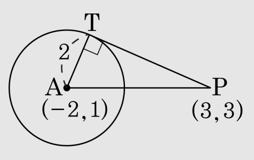
$\therefore\ m^2 = 9^2 - 7^2$
$\therefore\ l^2 - m^2 = (9^2-1^2)-(9^2-7^2)$
$= -1^2 + 7^2 = 48$

17. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 $(-2,\ 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{PT}=5$

18. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

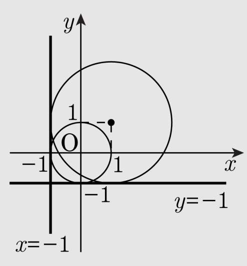
① $x=-2,\ y=-1$ ② $x=1,\ y=1$

③ $x=-1,\ y=1$ ④ $x=1,\ y=-1$

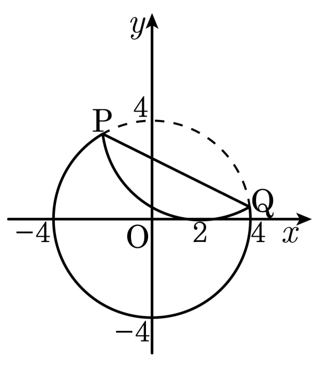
⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각 $x=-1,\ y=-1$



19. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2, 0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

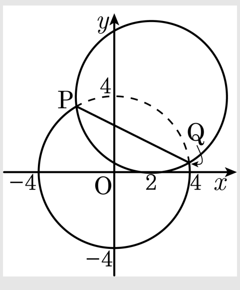


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$//



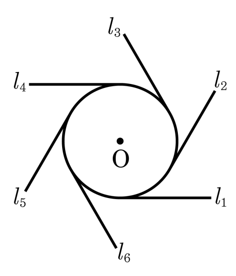
이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

20. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계 도를 그리고 있다. $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배

④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

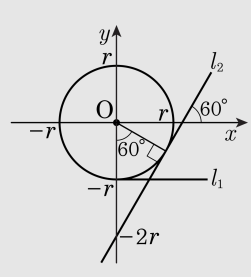
그림에서 $l_1 : y = -r$라 놓으면

$l_2 :\ y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

l_2 의 x 절편은 $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30° = \dfrac{r}{x}$ 이므로

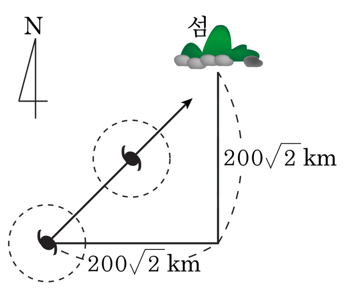
$x = r \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

21. 반지름의 길이가 10 km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10 km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30 km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)

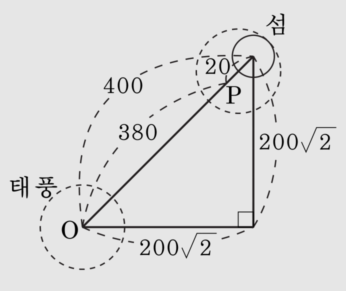


▶ 답: ______ 시간

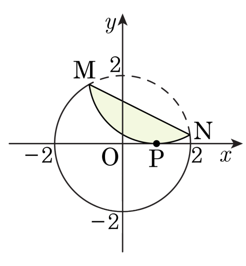
▷ 정답: 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.
$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



22. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$ 를 현 MN 에서 접었을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2+y^2=4\cdots$①
호 MN을 포함하는 원은 x 축에 접하므로
$x=1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.
$(x-1)^2+(y-2)^2=4\cdots$②
직선 MN 은 두 원 ①, ②의
공통현의 방정식이므로 ① − ②을 하면,
$x^2+y^2-4-\{(x-1)^2+(y-2)^2-4\}=0$
$\therefore\ 2x+4y=5$
$\therefore\ a=2,\ b=4,\ c=-5$
$\therefore\ a+b+c=1$

23. 두 원 $x^2+y^2-2x+2my+m^2-7=0$, $x^2+y^2-2mx+2y+m^2-9=0$ 가 직교할 때 m값을 구하면?

① $-4,\ 2$　　② $-4, -2$　　③ $4, -2$

④ $2,\ \sqrt{2}$　　⑤ $-2,\ \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x-1)^2+(y+m)^2=8$

$(x-m)^2+(y+1)^2=10$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m-1)^2+(m-1)^2=18,\ (m-1)^2=9,\ m-1=\pm 3$

$m=4, -2$

24. 원 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$ 위의 점에서 $y=x-1$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$ ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ 15

해설

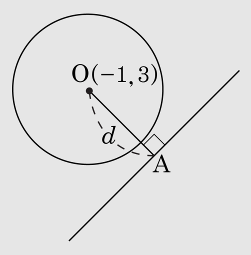
$x^2+y^2+2x-6y+2=0$

$x^2+2x+1+y^2-6y+9=8$

$(x+1)^2+(y-3)^2=8$

중심 $(-1,\ 3)$, $r=\sqrt{8}$

중심 $O(-1,\ 3)$ 에서 직선에 이르는 거리 d 는



$d = \overline{\mathrm{OA}} = \dfrac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 거리의 최댓값은

$M=d+r=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

거리의 최솟값은

$m=d-r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ M+m=5\sqrt{2}$

25. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $3:2$인 점을 P라 할 때, $\triangle$PAB의 넓이의 최댓값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

위의 그림과 같이 P 가 $P*$ 에 있을 때 넓이가 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 $\frac{1}{2}\times5\times6=15$ 이다.