1. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$과 중심이 같고, 점 $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$　　② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$　　④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$과 중심이 같은 원의 방정식은
$x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.
또, 점 $(1, 1)$을 지나므로
$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$
따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

2. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

$\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$

$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

3. 방정식 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k<-2$ ② $k<-1$ ③ $k>-2$

④ $k<2$ ⑤ $k>1$

해설

방정식을 정리하면, $(x-1)^2+(y+1)^2=2-k$

원이 되려면 $2-k>0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore \ k<2$

4. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $ax+by=13$ 이다. $a+b$ 의 값은?

① -13　② -1　③ 0　④ 4　⑤ 5

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x+y_1y=r^2$ 을 이용하면,
$2x+3y=13$ $a=2, b=3$　$\therefore\ a+b=5$

6. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2+4a+5$$
$$=2(a+1)^2+3$$

따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

7. 중심이 $(3,\ 4)$ 이고 x 축에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y-2)^2=5$
② $(x-3)^2+(y-4)^2=16$
③ $(x-5)^2+(y-9)^2=15$
④ $(x-1)^2+(y-3)^2=8$
⑤ $(x-6)^2+(y-6)^2=22$

해설

중심이 $(3, 4)$ 이고 x 축에 접하므로
반지름의 길이 r 은 $r=4$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

8. $A(-2, 1)$ 과 점 $B(2, -1)$ 을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 이므로 교점 P 는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P 의 자취의 길이는 $\overline{AB} \times \pi$ 이다.
$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$ 이다.

9. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는
$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$
따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면
$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

10. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$

교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$

의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로

$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$

$\therefore m=-2$

이 값을 대입하고 정리하면

$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.

$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$

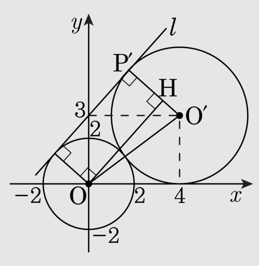
그러므로 $A+B-C=10$

11. 두 원 $x^2+y^2=4$ 와 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

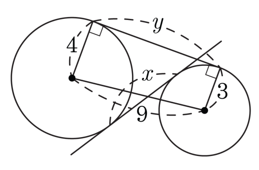
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

그림과 같이 두 원
$x^2+y^2=4$ 와
$(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 의 공통외접선
l 과 두 원과의 접점을 $\mathrm{P}, \mathrm{P'}$ 라 하고,
$x^2+y^2=4$ 의 중심 $(0,0)$ 에서
$\overline{\mathrm{O'P'}}$ 에 내린 수선의 발을
H 라 하면, $\overline{\mathrm{OO'}}=2+3=5$
$\overline{\mathrm{HO'}}=\overline{\mathrm{P'O'}}-\overline{\mathrm{P'H}}=3-\overline{\mathrm{PO}}=1$ 이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$



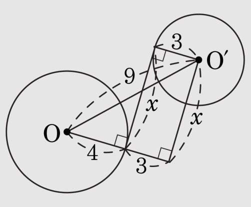
12. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.



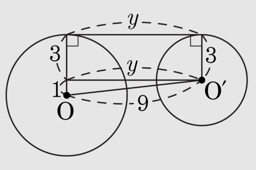
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2=(4+3)^2+x^2 \quad \therefore\ x^2=9^2-7^2$



$9^2=y^2+(4-3)^2 \quad \therefore\ y^2=9^2-1^2$

$\therefore\ x^2+y^2=2\cdot 9^2-7^2-1^2 \ =112$

13. 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 위의 점 C에서 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(10,\ 0)$을 지나는 직선 l에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5+4\sqrt{2}$ ② $5+\frac{9}{2}\sqrt{2}$ ③ $10+\sqrt{2}$
④ 11 ⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

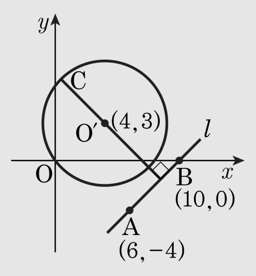
기울기가 $m=\frac{-4-0}{6-10}=1$이므로

$y=x-10$ 즉, $x-y-10=0$ 이고

원의 중심 $(4,\ 3)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 이므로 원 위의 점 C에서

직선 l에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2}+5$이다.

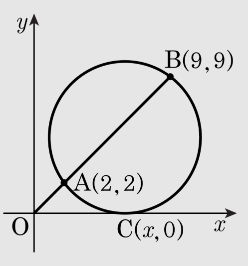


14. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

15. 두 점 $A(-4,\ 2)$, $B(2,\ -1)$로 부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y=3x-4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

$4 \cdot \left\{(x-2)^2 + (y+1)^2\right\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$

$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$\therefore\ \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

16. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0\ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

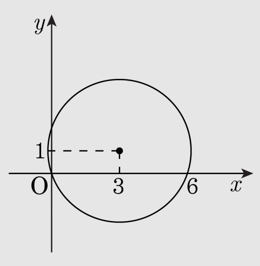
17. 원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-1)^2+(y-3)^2=10$,
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면,
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$ $\cdots$ ㉠



㉠의 그래프는 다음 그림과 같으므로
$y=0$ 일 때의 x 의 값을 구하면
$(x-3)^2+(0-1)^2=10$ 에서
$x^2-6x=0,\ x(x-6)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

18. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

19. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP}$: $\overline{BP}$ = 2 : 1이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

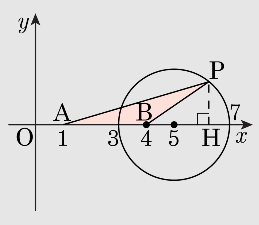
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

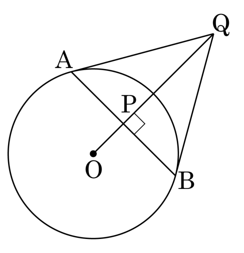
따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}$의 길이가 반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되므로 $\triangle PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \le \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.

20. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

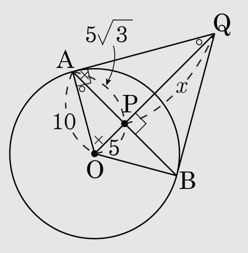


▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$

$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore \ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore \ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$

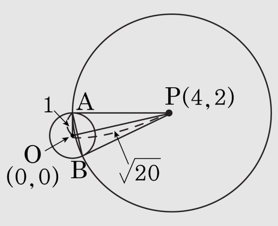
21. 점 (4, 2) 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 접점을 A, B 라 할 때 직선 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 방정식을 구하면?

① $4x+y=1$ ② $2x+y=1$ ③ $4x+2y=1$

④ $2x-y=1$ ⑤ $4x-y=1$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 원 $x^2+y^2=1$ 와 중심이 P(4, 2) 이고 반지름이 $\overline{\mathrm{PA}}$ 인 원의 공통현이다. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{19}$ 이므로



원 P 의 식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=19$

$x^2+y^2=1\cdots①$

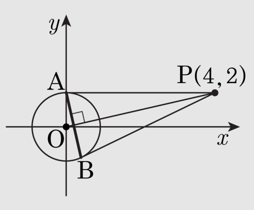
$(x-4)^2+(y-2)^2=19\cdots②$

공통현 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 식은 ① − ② 하면

$8x+4y=2$, $\therefore\ 4x+2y=1$

해설

점 P(4, 2) 에서 원의 중심 O 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.



또한 직선 $\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $\overline{\mathrm{OP}}$ 에 수직이므로 직선 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 -2 이다.

따라서 직선 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 방정식은 $y=-2x+b$ 라 하고, A 의 좌표를 $(m,\ n)$ 이라 하면

$n=-2m+b\ \rightarrow\ n+2m=b\cdots①$

또한, 접선의 방정식은 $mx+ny=1$ 이고 (4, 2) 를 지나므로

$4m+2n=1\cdots②$

①, ② 에서 $b=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 직선의 방정식은

$y=-2x+\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 4x+2y=1$

22. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > O, r > O) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ (㉯) $\cdot |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta = \dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$
$A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$

23. 한 점 $P(a,\ b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA}=\overline{PB}$ 인 점 $P(a,\ b)$ 의 자취를 구하면?

① $2a-3b-7=0$ ② $2a-3b+7=0$

③ $a^2+b^2=3$ ④ $a^2+b^2=4$

⑤ $a^2+b^2=5$

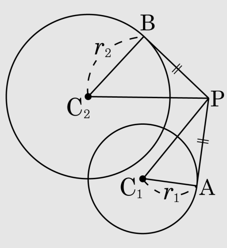
해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\ (x-2)^2+(y-2)^2=9$

문제의 조건에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $(\overline{PA})^2=(\overline{PB})^2$

$\Rightarrow\ (\overline{PC_1})^2-{r_1}^2=(\overline{PC_2})^2-{r_2}^2$



원의 중심 $C_1=(4,\ -1),\ C_2=(2,\ 2)$,

반지름 $r_1=2,\ r_2=3$

$\therefore\ (a-4)^2+(b+1)^2-4=(a-2)^2+(b-2)^2-9$

$\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

24. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$
④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

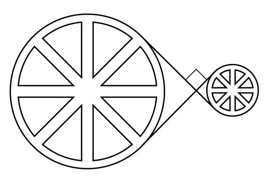
원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기
위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

25. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

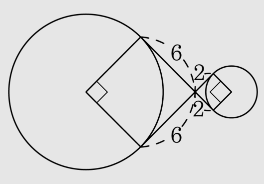


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\frac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\frac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$