1. $x^2 - 3x + 1 = ax^2 + bx$ 이 이차방정식 일 때, a 값이 될 수 없는 것을 구하여라.(단, a, b 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 3x + 1 = ax^2 + bx$ 에서
$(1-a)x^2 - (3+b)x + 1 = 0$
$\therefore x^2$ 의 계수가 0 이 아니어야 하므로 $a \neq 1$

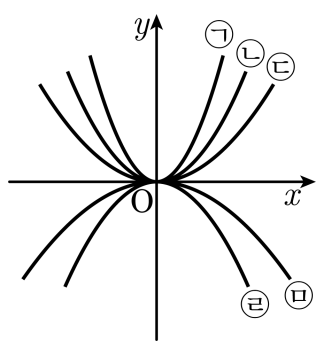
2. 다음 중 $x = -3$이 해가 되는 이차방정식은? (정답 2 개)

① $x(x+2) = 0$
② $x^2 + 2x - 3 = 0$
③ $x^2 + 5x + 6 = 0$
④ $2x^2 - x - 1 = 0$
⑤ $2x^2 + 4 = 0$

해설

② $(x-1)(x+3) = 0$
③ $(x+2)(x+3) = 0$

3. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프이다. ㉠ ~ ㉤ 중 a 의 값이 가장 작은 것을 골라라.



▶ 답 :

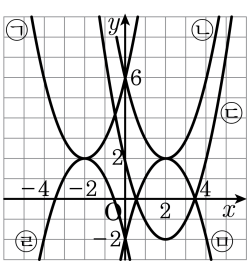
▷ 정답 : ㉣

해설

$y = ax^2$ 의 그래프에서 a 의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓다

㉠ > ㉡ > ㉢ > 0 > ㉤ > ㉣

4. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 4x + 6$ 의 그래프를 구하여라.



① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

이차함수 $y = x^2 - 4x + 6$

$= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 6$

$= (x - 2)^2 + 2$ 이므로

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 2)$ 이고, y 절편은 6 이므로 그래프는 ㉡ 이다.

5. 다음 중 이차함수 $y = 2(x+2)^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 아래로 볼록한 포물선이다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 0)$ 이다.

③ 축의 방정식은 $x = -2$

④ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

⑤ $y = -2(x+2)^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프는 $y = 2(x-2)^2$ 이다.

6. 다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것의 개수는?

보기

㉠ $x^2 - 6x = 0$　　㉡ $(2x+1)^2 = 3$

㉢ $2x^2 = 8x - 8$　　㉣ $(x+2)^2 = 2x^2 + 1$

① 없다.　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

㉢ $2x^2 = 8x - 8$,
$2x^2 - 8x + 8 = 0$,
$2(x-2)^2 = 0$
$\therefore\ x = 2$ (중근)

7. 이차방정식 $5(x-2)^2 = 20$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$(x-2)^2 = 4$
$(x-2) = \pm 2$
$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = 0$
$\therefore\ 4 + 0 = 4$

8. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 해가 $x=2$ 또는 $x=-3$ 일 때, $3a+b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 근을 α,β라고 하자.

$\alpha+\beta=2-3=-a, a=1$

$\alpha\beta=2\times(-3)=-6=b, b=-6$

$\therefore 3a+b=3-6=-3$

9. 다음 이차방정식의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 의 값은?

$2x^2+6x+10=0$

① $\frac{3}{5}$ ② 3 ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=5$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{3}{5}$

10. 다음 이차함수 중 $y=\frac{7}{5}x^2$ 의 그래프와 x 축 대칭인 것은?

① $y=\frac{5}{7}x^2$ ② $y=-\frac{5}{7}x^2$ ③ $y=-\frac{7}{5}x^2$
④ $y=-x^2$ ⑤ $y=\frac{2}{7}x^2$

해설

x 축 대칭이므로 $y=-\frac{7}{5}x^2$

11. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 짝지은 것이 옳은 것은?

① 꼭짓점의 좌표 : $(1,\ 4)$, 축의 방정식 : $x = 1$

② 꼭짓점의 좌표 : $(2,\ -1)$, 축의 방정식 : $x = 2$

③ 꼭짓점의 좌표 : $(-1,\ -3)$, 축의 방정식 : $x = -1$

④ 꼭짓점의 좌표 : $(-1,\ 4)$, 축의 방정식 : $x = -1$

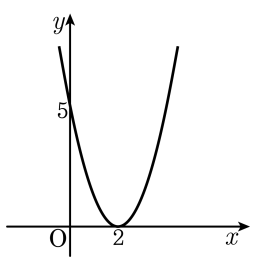
⑤ 꼭짓점의 좌표 : $(-2,\ -3)$, 축의 방정식 : $x = -2$

해설

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$, 축의 방정식은 $x = p$ 이다.

$y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -3)$, 축의 방정식은 $x = -2$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이고, y 절편이 5 인 포물선의 식을 $y = a(x-p)^2$ 이라 할 때, ap 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이므로

$y = a(x-2)^2$ 이고, y 절편이 5 이므로

$5 = a(0-2)^2$, $a = \frac{5}{4}$

$y = \frac{5}{4}(x-2)^2$

$a = \frac{5}{4}$, $p = 2$

$\therefore ap = \frac{5}{2}$

13. 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -2)$ 이고, y 절편이 3 인 포물선의 식을 구하면?

① $y = 5x^2 + 10x + 3$ ② $y = 3x^2 + 10x - 3$

③ $y = x^2 + 8x + 2$ ④ $y = 5x^2 + 2x + 1$

⑤ $y = 5x^2 - 10x + 2$

해설

$y = a(x+1)^2 - 2$ 에 $(0, 3)$ 을 대입하면
$3 = a - 2$
$a = 5$
$y = 5(x+1)^2 - 2 = 5x^2 + 10x + 3$

14. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$
② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$
④ $y = -x^2 - 2x + 1$
⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

15. $(a-b)^2-5(a-b)-6=0$, $ab=12$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a<b$)

① 16 ② 25 ③ 36 ④ 49 ⑤ 60

해설

$a-b=X$로 치환하면 $X^2-5X-6=0$

$(X-6)(X+1)=0,\ X=6$ 또는 $X=-1$

$a<b$이므로 $a-b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-1)^2+2\times12=25$

16. 이차방정식 $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$ 이 중근을 갖기 위한 m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{5}{2}$

해설

$D = 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 4) = 0$

$m^2 - 2m + 1 - m^2 + 4 = 0$

$-2m + 5 = 0$

$\therefore\ m = \frac{5}{2}$

17. 자연수 1부터 n까지의 합이 120이 될 때, n의 값을 구하여라. (단, 1부터 n까지의 합 : $\frac{n(n+1)}{2}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{n(n+1)}{2} = 120$이므로

$n^2 + n - 240 = 0$

$(n-15)(n+16) = 0$

$\therefore n = 15 (\because n > 0)$

18. 차가 4 인 두 양의 정수의 곱이 117 일 때, 이 두 양의 정수의 합은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

두 양의 정수를 $x,\ x-4$라 하면
$x(x-4)=117$
$x^2-4x-117=0$
$(x-13)(x+9)=0$
$\therefore\ x=13\ (\because x>4)$
두 양의 정수는 $13,\ 9$이다.
따라서 양의 정수의 합은 22 이다.

19. 이차함수 $y = -x^2 + 12x + m$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -36

해설

그래프가 x 축에 접하려면 $y = a(x-p)^2$ 의 꼴이어야 한다.

$y = -x^2 + 12x + m = -(x-6)^2 + 36 + m$

$\therefore\ 36 + m = 0$

$\therefore\ m = -36$

20. 이차함수 $y = 9x^2 - 12ax + 3a^2 + 4a - 4$ 의 최솟값이 -16 일 때, a 의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = 9x^2 - 12ax + 3a^2 + 4a - 4$
$= (3x - 2a)^2 - a^2 + 4a - 4$

최솟값은 $-a^2 + 4a - 4 = -16$ 이다.
$a^2 - 4a - 12 = 0$
$(a + 2)(a - 6) = 0$

$\therefore a = -2$ 또는 $a = 6$
따라서 a 의 값들의 합은 $-2 + 6 = 4$ 이다.

21. 이차방정식 $x^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이 $x = 1 \pm 2\sqrt{5}$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -18$

해설

$x^2 - 2ax + b = 0$ 에서
$x^2 - 2ax = -b, x^2 - 2ax + a^2 = -b + a^2$
$(x - a)^2 = -b + a^2, (x - a) = \pm\sqrt{-b + a^2}$
$\therefore x = a \pm \sqrt{-b + a^2} = 1 \pm 2\sqrt{5}$
따라서 $a = 1$, a 값을 대입하면
$\sqrt{1 - b} = \sqrt{20}$
$\therefore b = -19$
따라서 $a + b = -18$ 이다.

22. 이차방정식 $4x^2 - kx + 9 = 0$ 이 중근을 가질 때, 두 양의 정수 k, $k-5$ 를 두 근으로 하는 이차방정식 A 는? (단, A 의 이차항의 계수는 1 이다.)

① $x^2 + 19x + 84 = 0$ ② $x^2 - 19x - 84 = 0$

③ $x^2 - 84x + 19 = 0$ ④ $x^2 - 19x + 84 = 0$

⑤ $x^2 - 20x + 84 = 0$

해설

$4x^2 - kx + 9 = 0$ 이 중근을 가지므로
$k^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$
$k = 12$ ($\because$ $k > 0$)
따라서 두 근은 12, 7
$\therefore$ $(x-12)(x-7) = 0$
$\therefore$ $x^2 - 19x + 84 = 0$

23. 이차함수 $y = 3x^2 + 2x + a$ 의 그래프가 점 $(a, a^2 + 2)$ 를 지나고 x 축과 두 점에서 만나도록 a 의 값을 정하여라.

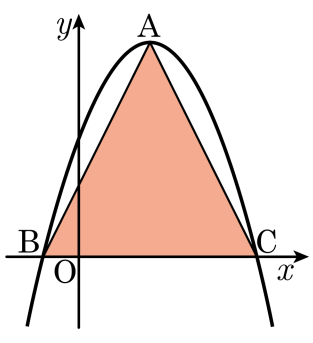
▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

해설

$a^2 + 2 = 3a^2 + 2a + a$, $2a^2 + 3a - 2 = 0$,
$(2a - 1)(a + 2) = 0$
$\therefore a = \frac{1}{2}, \ -2$
x 축과 두 점에서 만나므로
$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a > 0$, $a < \frac{1}{3}$
$\therefore \ a = -2$

24. 다음은 $y = a(x-2)^2 + 6$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 18 일 때, a 의 값을 구하면?



① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$18 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times 6$, $18 = 3\ \overline{BC}$, $\overline{BC} = 6$

따라서 점 B 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고, C 의 좌표는 $(5,\ 0)$ 이다.

$y = a(x-2)^2 + 6$ 에 $(5,\ 0)$ 을 대입하면 $9a + 6 = 0$ 이다.

$\therefore a = -\frac{2}{3}$

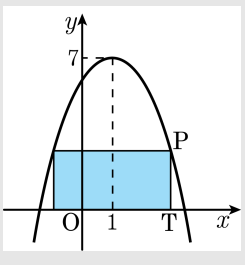
25. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t, \ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14\end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.