1. 연립부등식 $\begin{cases} x-1>2x-3 \\ x^2 \le x+2 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le -1$　　② $-1 \le x < 1$　　③ $-1 \le x < 2$

④ $1 < x < 2$　　⑤ $2 \le x < 4$

해설

$x-1>2x-3$에서 $-x>-2$

$\therefore x<2 \cdots$ ㈎

$x^2 \le x+2$에서 $x^2-x-2 \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$-1 \le x < 2$이다.

2. 두 점 $A(a,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$일 때, 실수 a의 값들의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(4-a)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

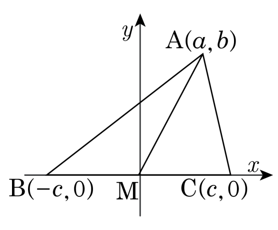
$a^2 - 8a + 32 = 80$, $a^2 - 8a - 48 = 0$

$(a-12)(a+4) = 0$

$\therefore\ a = 12$ 또는 $a = -4$

따라서 구하는 값은 $12 - 4 = 8$

3. 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

4. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ 이라고 할 때, ab 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot \mathrm{a}+3\cdot 3}{1+3},\ \frac{1\cdot \mathrm{b}+3\cdot 2}{1+3}\right)=\mathrm{P}(2,\ 1)$ 이므로,

$\frac{1\cdot a+3\cdot 3}{1+3}=2,\ a+9=8\ \therefore\ a=-1$

$\frac{1\cdot b+3\cdot 2}{1+3}=1,\ b+6=4\ \therefore\ b=-2$

$\therefore\ ab=2$

5. 세 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$, $(a,\ 3a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 8)$, $\mathrm{C}(a,\ 3a)$ 로 놓으면

직선 AB 의 기울기 : $\dfrac{8-2}{3-0}=2$

직선 BC 의 기울기 : $\dfrac{3a-8}{a-3}$

한편, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로

직선 AB 의 기울기와 직선 BC 의 기울기가 서로 같다.

$\dfrac{3a-8}{a-3}=2,\ 3a-8=2a-6$

$\therefore a=2$

6. 다음<보기> 중 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y=2x+1$ ㉡ $y=-2(x-1)$

㉢ $y=-2x+3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 $y\ \frac{1}{2}x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 인 직선은 ㉡, ㉢이다.

7. 직선 $x + ay - 1 = 0$이 직선 $3x + by + 1 = 0$과 수직이고, 직선 $x - (b+3)y + 1 = 0$과 평행일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$x + ay - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠,
$3x + bx + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
$x - (b-3)y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉠⊥㉡ : $1 \cdot 3 + a \cdot b = 0$에서 $ab = -3$
㉠//㉢ : $\frac{1}{1} = \frac{-(b+3)}{a} \neq \frac{1}{-1}$에서 $a + b = -3$
$\therefore\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$

8. 두 점 $A(3,2), B(1,4)$ 를 연결하는 선분의 중점을 지나고 $2x+y-1=0$ 에 수직인 직선을 l 이라 할 때, 다음 중 직선 l 위에 있는 점은?

① $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(-6, -\frac{3}{2}\right)$　③ $(0,2)$
④ $(1,1)$　⑤ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

해설

두 점 $A(3,2), B(1,4)$ 의 중점 M 의 좌표는
$(2,3)$ 이고, 직선$2x+y-1=0$ 에 수직인
직선의 기울기 m 은 $(-2)\cdot m=-1$에서$m=\frac{1}{2}$
이 때, 구하는 직선 l 의 방정식은
$y=\frac{1}{2}(x-2)+3 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+2$
따라서, 이 직선 위의 점은 $(0,2)$ 이다

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} x+y=1 \cdots ㉠ \\ y+z=3 \cdots ㉡ \\ z+x=4 \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ $\Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4 \cdots$ ㉣

㉣ − ㉠ $\Rightarrow z=3$

㉣ − ㉡ $\Rightarrow x=1$

㉣ − ㉢ $\Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

10. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

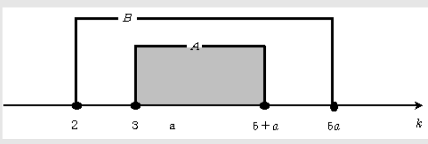
① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

11. 이차부등식 $ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a<0$ ③ $a<2$
④ $a<4$ ⑤ $a<8$

해설

$ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면
ⅰ) $a<0$
ⅱ) $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=2^2-a^2<0$
$a^2-4>0, (a+2)(a-2)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $a<-2$

12. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개　② 3개　③ 5개　④ 7개　⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3 \geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3) \leq 0$, $(a-3)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
$-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

13. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ······㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$ ······㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ······㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

14. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$일 때 ;

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$일 때 ;

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0, -\frac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

15. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

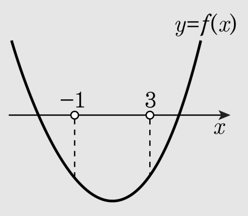
16. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\dfrac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

17. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $G(2,\ -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{a-2+5}{3}, \dfrac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\dfrac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$
또 $\dfrac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$
$\therefore\ a+b = -1$

18. 두 직선 $3x+4y+4=0,\ 3x+4y+2=0$ 사이의 거리는 얼마인가?

① $\frac{2}{5}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$3x+4y+4=0$ 의 임의의 한 점을 잡는다.
$(0,-1)$ 점과 직선 사이의 거리를 구하는
공식을 이용하면

$$\therefore \ \frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$$

19. x, y에 관한 연립방정식

$\begin{cases} kx+(1-k)y=2k+1 \\ akx+(k+1)y=b+4k \end{cases}$ 가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$kx+(1-k)y=2k+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$akx+(k+1)y=b+4k \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $(x-y-2)k+(y-1)=0$
$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$
$\therefore\ x=3,\ y=1 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면
$(3a-3)k+(1-b)=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

20. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0$ ······㉠

$\alpha^2+\alpha+3k=0$ ······㉡

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore$ $k=-4$

$\therefore$ $\alpha-k=7$

21. 부등식 $[x-1]^2 + 3[x] - 3 < 0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$ ② $-2 \le x < 0$ ③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1 = A$라 하면 $x = A+1$

$\therefore [A]^2 + 3[A+1] - 3 = [A]^2 + 3[A] + 3 - 3 < 0$

$[A]([A]+3) < 0 \quad \therefore -3 < [A] < 0$

$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x - 1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$