1. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$
④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

2. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$　　② $x = \pm 2, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$　　④ $x = \pm 2, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2, \quad x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

3. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 <u>아닌</u> 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

4. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실근은 -1, 2이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

5. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

6. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$의 두 허근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$이므로
두 허근 $\alpha,\ \beta$는
각각 $\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$

7. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　② $-1+\sqrt{2}$, -3　③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

8. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

9. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1$,
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

10. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$$
$$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$$
$$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$$

11. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ ω ⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$
$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0,\ \omega^3 = 1$
$\Rightarrow (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$
$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$
$= \omega^2 + \omega = -1$

12. 사차방정식 $x^4+x^3-x-1=0$의 두 허근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^{100}+\dfrac{1}{\beta^{100}}$과 값이 같은 것은?

① $\alpha+1$　② $\alpha-2$　③ $\dfrac{2}{\beta}$　④ -1　⑤ 1

해설

$x^4+x^3-x-1=0$

$x^3(x+1)-(x+1)=0$

$(x+1)(x^3-1)=0$

$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 α,β

$\therefore \alpha^3=1, \beta^3=1,\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$$\alpha^{100}+\frac{1}{\beta^{100}}=(\alpha^3)^{33}\alpha+\frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta}$$

$$=\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{2}{\beta}$$

13. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $1-2w+3w^2-4w^3+3w^4-2w^5$의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -4

해설

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω일 때

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1-2\omega+3\omega^2-4\cdot 1+3\omega^3\cdot\omega-2\omega^3\cdot\omega^2$

$=1-2\omega+3\omega^2-4+3\omega-2\omega^2$

$=\omega^2+\omega+1-4=-4$

$\therefore\ -4$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

15. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

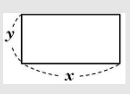
16. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

17. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 x^2-y^2의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 -12

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를

㉡식에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20$, $2x^2-4x+4-20=0$,

$x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore\ x^2-y^2=16-4=12$ 또는 $x^2-y^2=4-16=-12$

18. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

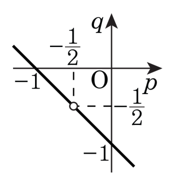
19. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

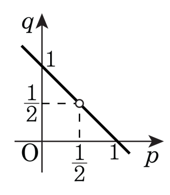
① 1개　② 2개　③ 4개
④ 8개　⑤ 무수히 많다.

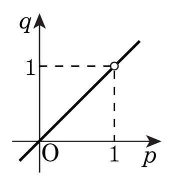
해설

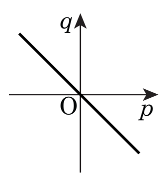
주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$
(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy = 1,\ x = y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy = -1\ ,\ x = -y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

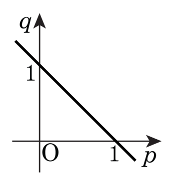
20. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2-px-q=0$, $x^2-qx-p=0$이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p, q의 관계를 나타낸 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{cases} x^2-px-q=0 & \cdots ① \\ x^2-qx-p=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①–②에서 $(-p+q)x-(-p+q)=0$

$\therefore\ (-p+q)(x-1)=0$

여기서 $-p+q=0$이면 즉 $q=p$이면

①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore\ x=1$이다.

이 때 ①에서 $1-p-q=0$

따라서 구하는 식은 $q=-p+1$(단, $p \neq q$)

21. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 7 ⑤ ± 9

해설

$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k \pm 5$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

23. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$
④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 - (a+2)t + \dfrac{a^2+1}{4} = 0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 \times \dfrac{a^2+1}{4} \geq 0$

$4a+3 \geq 0$

$\therefore\ a \geq -\dfrac{3}{4}$

24. 두 이차방정식 $ax^2 + 4x + 2 = 0,\ x^2 + ax + 1 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면
$at^2 + 4t + 2 = 0 \cdots$ ㉠
$t^2 + at + 1 = 0 \cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡ $\times 2 : (a-2)t^2 + (4-2a)t = 0$
$(a-2)t\,(t-2) = 0$
이때, $a = 2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a \neq 2$
그런데 $t = 0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t = 2$
따라서 ㉡에서 $2a + 5 = 0$
$\therefore\ a = -\frac{5}{2}$

25. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$에서

$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$

$x,\ y$가 실수이므로 $x + y = 0,\ x - 2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = -2$

$\therefore\ xy = -4$

26. 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$
$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$
$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$
$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$
$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로
$y=2,\ x-4+1=0\quad\therefore\ x=3$
따라서 $x+y=3+2=5$

27. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

28. 삼차방정식 $x^3-2x^2-4x+k=0$ 의 세 근 α,β,γ 에 대하여 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=-k$ 이므로

$\alpha+\beta=2-\gamma,\ \beta+\gamma=2-\alpha,\ \gamma+\alpha=2-\beta$

주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-8-8+k=-k$

$\therefore\ k=4$

29. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2-11xy-26y^2=0$, $(x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢
$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm1,\ x=\mp2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

30. $x = \alpha,\ y = \beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \cdots ① \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①×3 − ②×2하면

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0,\ (x - 2y)(x - y) = 0,$

$x = 2y\ or\ x = y$

$x = 2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2,\ 0 = -2$불능

$x = y$를 ①식에 대입하면

$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$

$y^2 = 1,\ y \pm 1,\ x \pm 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$

31. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

32. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는

$a=0$, $b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

33. 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$
x, y가 정수이므로
$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$
$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$
$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$

34. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$

$(m-4)(n-2)=8$

$8=1\times 8=2\times 4=4\times 2=8\times 1$이므로

$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$

$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

35. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서

$x(y-3)-3(y-3)-5=0,\ (x-3)y-3=5$

$x \geq 1,\ y \geq 1$이므로 $x-3 \geq -2,\ y-3 \geq -2$

(ⅰ) $x-3=1,\ y-3=5$일 때, $x=4.\ y=8$

(ⅱ) $x-3=5,\ y-3=1$일 때, $x=8,\ y=4$

따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$

36. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta = m + 1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m = -1,\ 7$

37. x 에 관한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4k+4=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② 7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 1

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $(\alpha \geq \beta)$

$\alpha+\beta=-2(k-1)\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=4k+4\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $\alpha\beta+2\alpha+2\beta=8$, $(\alpha+2)(\beta+2)=12,\quad \alpha\beta=-10,0,2,42,32,30$

그런데 $\alpha,\ \beta$가 정수이므로 ㉡에서

$k=\dfrac{\alpha\beta-4}{4}$

따라서 k의 정수값은 $-1,\ 7$

$\therefore\ k$의 값들의 합은 6