1. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

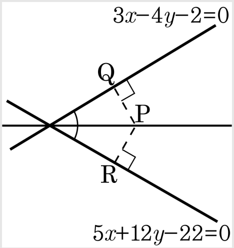
2. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

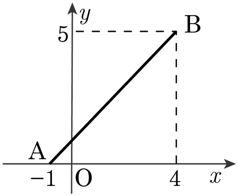
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

3. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(4,\ 5)$에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 $3:2$ 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$

② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$

④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

해설

점 P를 (x, y)라 두면

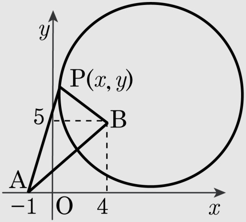
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$이므로

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$



4. 정점 A$(-2,\ 3)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y=x+\frac{13}{3}$　② $y=2x+\frac{13}{3}$　③ $y=3x+\frac{13}{3}$

④ $y=4x+\frac{13}{3}$　⑤ $y=5x+\frac{13}{3}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a-1)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

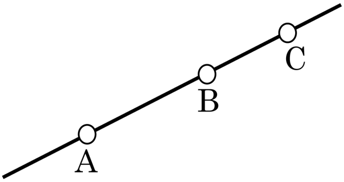
$$x=\frac{1\cdot a+2\cdot(-2)}{1+2}=\frac{a-4}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot(2a-1)+2\cdot 3}{1+2}=\frac{2a+5}{3}$$

여기에서 a를 소거하여 $x,\ y$의 관계식을 구하면

$$\therefore\ y=2x+\frac{13}{3}$$

5. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$)



① $\overline{AB}$ 의 중점

② $\overline{BC}$ 의 중점

③ $\overline{AC}$ 의 중점

④ $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점

⑤ $\overline{AC}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$A(-2a,\ 0),\ B(0,\ 0),\ C(a,\ 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 $P(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$= (x+2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

$= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a,\ y = 0$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소이고

운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $P\left(-\frac{1}{3}\mathrm{a},\ 0\right)$ 은 $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.

6. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(3, 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x = 1$ ② $y = 1$ ③ $y = x + 1$

④ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ⑤ $y = 2x - 1$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2$

$\therefore\ y = 2x - 1$

7. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, $a,\ b$는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z=(2-3i)(a+bi)$$
$$=(2a+3b)+(2b-3a)i\cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

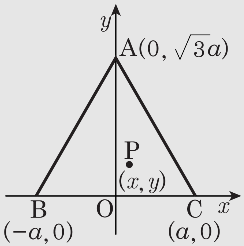
8. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분

④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= \ (x+a)^2 + y^2 \ + \ (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

9. 세 점 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

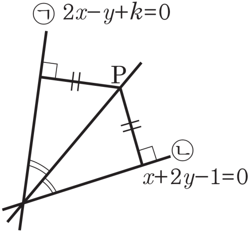
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$
$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$
$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$
$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

10. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 P(3, 1)을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2　② 4　③ -6
④ 8　⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots ㉠$

$x+2y-1=0 \quad \cdots ㉡$

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

11. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$　　② $y=2$　　③ $x+y=2$

④ $x-y=-4$　　⑤ $x+y=0$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2\ \cdots$ ㉠

$\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,

$a-b=x$, $a+b=y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{y-x}{2}$

㉠ 에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$\therefore y-x=-(x+y)+4$

$\therefore y=2$