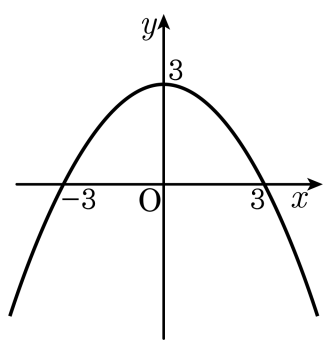
1. 다음의 그림과 같은 이차함수의 그래프의 식은?



① $y=-\frac{1}{3}x^2-3$ ② $y=-\frac{1}{3}x^2+3$ ③ $y=\frac{1}{3}x^2-3$
④ $y=\frac{1}{3}x^2+3$ ⑤ $y=-x^2+3$

해설

$y=ax^2+3$ 이 점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로

$0=9a+3,\ a=-\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2+3$

2. 다음 중 $y = x^2$ 의 그래프와 $y = -x^2$ 의 공통점이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 3 개)

① 원점을 지난다.

② 아래로 볼록하다.

③ y 축에 대하여 대칭이다.

④ 그래프가 제 1 사분면을 지난다.

⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

x^2 의 계수가 양수면 아래로 볼록, 음수면 위로 볼록하다.

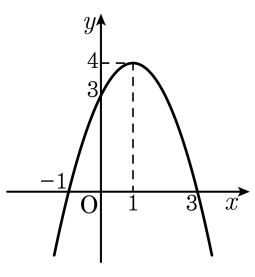
3. 이차함수 $y = -\frac{3}{2}x^2 - 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동 시켰더니 점 $(4,\ k)$ 를 지났다. 이때, k 의 값을 구하면? (단, $k > 0$)

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

$y = -\frac{3}{2}x^2 - 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동 시킨 함수의 식은 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 4$ 이고, 점 $(4,\ k)$ 를 지나므로 $k = -\frac{3}{2} \times 4^2 + 4,\ k = -20$ 이다.

4. 다음 그림은 이차함수의 그래프이다. 이 포물선의 방정식은 어느 것인가?



① $y = -x^2 + 2x + 3$

② $y = x^2 + 2x + 1$

③ $y = x^2 - 3x + 2$

④ $y = -2x^2 + 3$

⑤ $y = -3x^2 + 2x - 1$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 4)$ 이므로
$y = a(x-1)^2 + 4$ 이고, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$3 = a(0-1)^2 + 4 \qquad \therefore\ a = -1$

$\therefore\ y = -(x-1)^2 + 4$
$\quad = -x^2 + 2x + 3$

5. 이차함수 $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선 식은?

① $y=(x-1)^2+2$ ② $y=(x+1)^2+2$

③ $y=(x-1)^2-2$ ④ $y=-(x+1)^2+2$

⑤ $y=-(x-1)^2+2$

해설

y 대신에 $-y$ 를 대입하면 $y=-(x-1)^2+2$ 이다.

6. 이차함수 $y = -3x^2 + 18x$ 을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 a, p, q 의 합 $a+p+q$ 의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

해설

$y = -3(x^2 - 6x + 9 - 9) = -3(x-3)^2 + 27$
$a = -3,\ p = 3,\ q = 27$
$a + p + q = 27$ 이다.

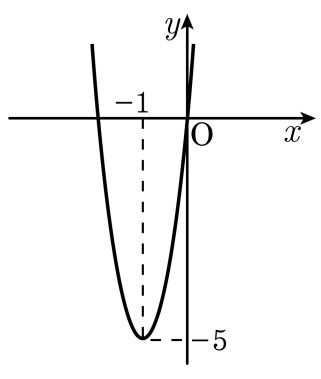
7. 이차함수 $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동 한 것이다. $p+q$ 의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$p = 2,\ q = 3 \Rightarrow p + q = 5$

8. 다음 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -5)$ 이고, 원점을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?



① $y = -x^2 + 2x$ ② $y = -2x^2 + 4x$ ③ $y = -2x^2 - 4x$

④ $y = 4x^2 + 4x$ ⑤ $y = 5x^2 + 10x$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -5)$ 이므로 구하는 이차함수의 식을 $y = a(x+1)^2 - 5$ 로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로 $0 = a - 5 \quad \therefore a = 5$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y = 5(x+1)^2 - 5 = 5x^2 + 10x$ 이다.

9. $y = -x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이고 두 점 $(2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -x^2 - 2$ ② $y = -x^2 - 3x - 6$

③ $y = -x^2 + 6x - 8$ ④ $y = x^2 + 6x - 8$

⑤ $y = -x^2 - 6x + 8$

해설

$y = -(x-2)(x-4) = -x^2 + 6x - 8$

10. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $y = ax^2$ 에서 a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

㉡ $y = 2x^2$ 와 $y = \frac{1}{2}x^2$ 은 x 축에 대하여 대칭이다.

㉢ $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프는 아래로 볼록한 모양이다.

㉣ $y = ax^2$ 의 대칭축은 x 축이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

㉡ $y = 2x^2$ 와 $y = -2x^2$ 이 x 축에 대하여 대칭이다.
㉣ $y = ax^2$ 의 대칭축은 y 축이다.

11. $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시켰더니 점 $(4,\ -1)$ 을 지났다. p 의 값이 될 수 있는 것을 모두 합하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$y = -(x-p)^2$ 의 그래프가 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로

$-1 = -(4-p)^2$

$p = 3$ 또는 $p = 5$, $3+5 = 8$ 이다.

12. 이차함수 $y=\frac{4}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5 만큼 평행이동하면 점 $(8,\ k)$를 지난다. 이 때, k 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y=ax^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y=a(x-p)^2$ 이므로 $y=\frac{4}{3}(x-5)^2$ 이고, x 의 값이 8 이므로 대입하면 $y=12$ 이다. 따라서 $k=12$ 이다.

13. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 5$ 의 그래프에서 x 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위를 구하여라.

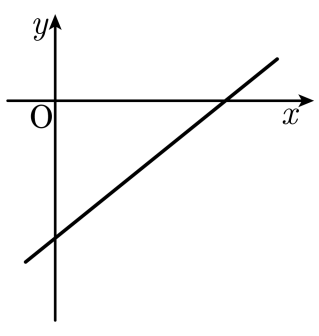
▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 2$

해설

$y = -x^2 + 4x - 5$
$y = -(x-2)^2 - 1$
따라서 꼭짓점이 $(2, -1)$ 인 위로 볼록한 그래프이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하는 x의 범위는 $x > 2$

14. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = -(x + a)^2 + b$ 의 꼭짓점이 위치하는 사분면을 구하여라.



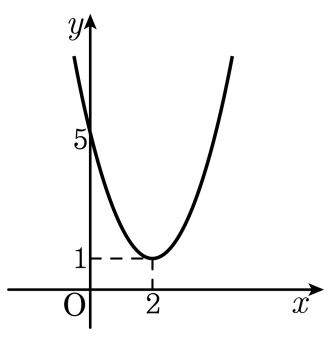
▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 3사분면

해설

일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프는 기울기는 양수이고 y 절편은 음수이다.
따라서 $a > 0, b < 0$ 이다.
이차함수 $y = -(x + a)^2 + b$ 의 꼭짓점은 $(-a, b)$ 이다.
따라서 $-a < 0, b < 0$ 이므로 꼭짓점은 제3 사분면에 위치한다.

15. 다음 그림은 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프이다. 이 포물선에 대한 설명 중 옳은 것은?



① 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$ 이다.

② $y = (x-2)^2 + 1$ 의 그래프이다.

③ 축의 방정식은 $x = 1$ 이다.

④ $x < 2$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다.

⑤ y의 값의 범위는 $y \le 1$이다.

해설

① 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$
③ 축의 방정식은 $x = 2$ 이다.
④ $x < 2$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.
⑤ y의 값의 범위는 $y \ge 1$

16. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 의 그래프와 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표가 p, q 이고, y 축과 만나는 점의 좌표가 r 일 때, pqr 의 값을 구하면?

① -32 ② -16 ③ -8 ④ 16 ⑤ 32

해설

x 축과의 교점 ($y = 0$ 을 대입) 의 x 좌표를 구하면

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

$(x-4)(x+2) = 0$ 이므로

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$

y 축과 만나는 점의 좌표가 r 은 y 절편이므로 $r = 4$

$\therefore pqr = (-2) \times 4 \times 4 = -32$

17. 아래 이차함수 식 가운데 x 축과 교점이 한 개인 것은?

① $y = x^2 - x + 3$　② $y = x^2 + x - 2$

③ $y = x^2 + 1$　④ $y = x^2 - 3x + 4$

⑤ $y = 4x^2 - 4x + 1$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축과의 교점의 개수

$b^2 - 4ac > 0$: 2개

$b^2 - 4ac = 0$: 1개

$b^2 - 4ac < 0$: 0개

⑤ $(-4)^2 - 4 \times 4 = 0$

따라서 x 축과 한 점에서 만난다.

18. 포물선 $y = 2x^2 - 5x - 12$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라고 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{11}{2}$

해설

$y = 2x^2 - 5x - 12$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표는 $2x^2 - 5x - 12 = 0$ 의 근과 같다.

$2x^2 - 5x - 12 = 0$,

$(2x + 3)(x - 4) = 0$,

$x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 4$,

$\therefore \overline{AB} = 4 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2}$

19. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(4, -2)$ 이다.

② 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ 의 그래프와 모양이 같다.

③ $x < 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

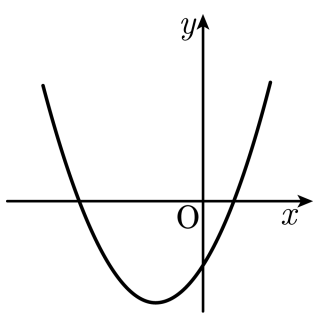
④ $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.

⑤ 제 3 사분면을 지나지 않는다.

해설

③ $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$, 아래로 볼록하기 때문에, 축의 왼쪽에서는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

20. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. abc 의 부호를 결정하여라.



▶ 답 : 0

▷ 정답 : $abc < 0$

해설

아래로 볼록이므로 $a > 0$,

축의 식 $-\frac{b}{2a} < 0$, $b > 0$

y 절편 $c < 0$

$a > 0,\ b > 0,\ c < 0$

$\therefore\ abc < 0$

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$이 $x = 1$일 때 최솟값 5 를 가진다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = ax^2 + bx + 6$
$= a(x-1)^2 + 5$
($\because$ $x = 1$일 때, 최솟값 5를 가진다.)
$= a(x^2 - 2x + 1) + 5$
$= ax^2 - 2ax + a + 5$
$\therefore$ $a + 5 = 6$, $-2a = b$
$\therefore$ $a = 1$, $b = -2$
$\therefore$ $a + b = 1 + (-2) = -1$

22. $y = 2x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A$(2,\ p)$, B$(q,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은?(단, $q < 0$)

① $y = 2x - 3$　② $y = -2x + 3$　③ $y = 2x + 4$

④ $y = -2x + 4$　⑤ $y = 2x - 4$

해설

$(2,\ p)$ 를 $y = 2x^2$ 에 대입하면 $p = 2 \times 2^2 = 8$

$(q,\ 2)$ 를 대입하면 $2 = 2q^2$, $q^2 = 1$ 에서 $q = \pm 1$

그런데 $q < 0$ 이므로 $q = -1$

$(2,\ 8)$, $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$(기울기) = \dfrac{8-2}{2-(-1)} = \dfrac{6}{3} = 2$

$y = 2x + b$ 에 $(2,\ 8)$ 을 대입하면

$8 = 2 \times 2 + b \ \therefore\ b = 4$

따라서 구하는 식은 $y = 2x + 4$

23. 세 점 $(-1,\ -5)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$ 일 때, $p-q$ 의 값은?

① 1 ② 5 ③ -5 ④ -1 ⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 놓으면
$(-1,-5)$를 지나므로 $-5=a-b+5$
$(0,5)$를 지나므로 $5=c$
$(2,13)$ 을 지나므로 $13=4a+2b+5$
$\therefore a=-2,\ b=8,\ c=5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 13)$ 이므로
$p-q=-11$ 이다.

24. $x=1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$y=a(x-1)^2+1$

$=a(x^2-2x+1)+1$

$=ax^2-2ax+a+1$

$a+1=2,\ a=1$

$y=(x-1)^2+1$

$p=1, q=1$

$\therefore apq=1$

25. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

26. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

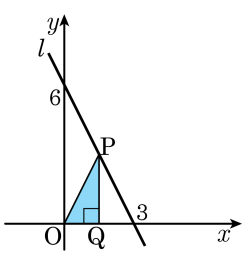
해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

27. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle POQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\triangle POQ = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$= -a^2 + 3a$$
$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle POQ$ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

28. 이차함수 $y=(x-1)(x-p^2)$ $(p>0)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점, y 축과 만나는 한 점을 연결한 삼각형의 외심 O 의 x 좌표가 6 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{11}$

해설

x 축과 만나는 두 점은 $(1,\ 0)$, $(p^2,\ 0)$ 이고
y 축과 만나는 점은 $(0,\ p^2)$

외심 O 의 x 좌표가 6 이므로 $\dfrac{p^2+1}{2}=6$

$\therefore\ p=\pm\sqrt{11}$

따라서 $p>0$ 이므로 $p=\sqrt{11}$ 이다.

29. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 1), B(1, −2) 와 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{211}{10}$

해설

점 P 의 좌표를 $(a, 2a)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$

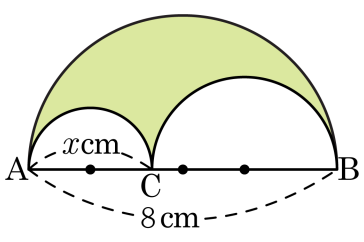
$= (a-4)^2 + (2a-1)^2 + (a-1)^2 + (2a+2)^2$

$= 10a^2 - 6a + 22$

$= 10\left(a - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{211}{10}$

따라서 $a = \frac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{211}{10}$ 이다.

30. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8-x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2}\times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$y\pi = -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x)$$
$$= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16)$$
$$= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi\text{이다.}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.