

1. 두 점 A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, -1), Q(0, 6)

② P(3.6, 0), Q(-1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)

④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(-1, 2)

해설

A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x , 0) 과 Q(0, y)
를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

2. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?
- ① 서로 외부에 있다
 - ② 외접한다
 - ③ 두 점에서 만난다
 - ④ 내접한다
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

3. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a < m < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3 > 2$
 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$ 이므로
 $m \neq -1$, $m > -1$ 이고, $D < 0$ 이다.
 $\frac{D}{4} = m^2 - 3m < 0 \quad \therefore 0 < m < 3$
 $\therefore a = 0, b = 3$
 $\therefore a + b = 3$

4. 두 점 $A(1, 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이므로 $C(5, -6)$ 이다.
 $\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

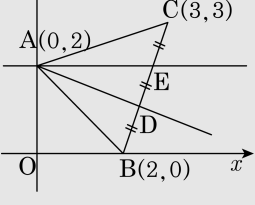
5. 점 A(0, 2), B(2, 0), C(3, 3) 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x + (k-1)y = 2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2) + x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이 A(0, 2) 를 지나는 직선이므로 $\triangle ABC$ 를 그림과 같이 2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 1 : 2 또는 2 : 1 로 내분하는 점D, E 를 지나게 된다.

D $\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, E $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$$

$\therefore k=-1$

6. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

7. 점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

- ㉠ $y = -4x + 2$ ㉡ $y = 4x + 2$ ㉢ $y = -4x + 4$
㉣ $y = 4x + 4$ ㉤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
 $y + 2 = m(x - 1) \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면
㉠식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
 $x \rightarrow 4 - x \quad y \rightarrow 6 - y$ 이므로
 $6 - y + 2 = m(4 - x - 1), y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{2}$
직선 ㉡를 x 축에 대칭이동하면
 $-y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{3}$
직선 ㉢이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로
 $4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$
따라서 처음 직선의 방정식 ㉠은
 $y + 2 = -4(x - 1), y = -4x + 2$

8. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

9. $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \leq 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4

② 3

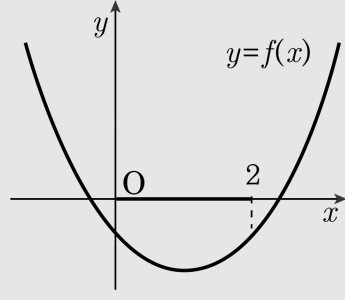
③ 2

④ 1

⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
 $f(0) \leq 0, f(2) \leq 0$ 이어야 한다.



$$f(0) = a^2 - 4 \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = -2a + a^2 \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위는 $0 \leq a \leq 2$

따라서 $M = 2, m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

10. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
 ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
 ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\textcircled{7} d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1 \text{ 그러므로 교점은 2개다.}$$

$$\frac{Z}{n}, n(A \cap B) = 2$$

$$\textcircled{\text{L}} \quad d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1 \quad (\because b \geq a)$$

그러므로 교점은 없다.

$$\textcircled{\sqsubset} \ d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

그러므로 교점은 1 개다.

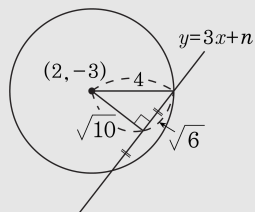
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

11. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리

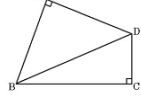
$$\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|9 + n| = 10$$

$$\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$$

$$\therefore 1 - 19 = -18$$

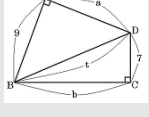
12. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 7$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ 인 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t 라 할 때, t^2 의 값을 구하면?



- ① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BD} = t$ 라 할 때,



$$9^2 + a^2 = 7^2 + b^2, \quad b^2 - a^2 = 32$$

(자연수이므로, $b > a$)

$$(b - a)(b + a) = 32 \Rightarrow \text{부정방정식}$$

$b > a$ 이므로

$b - a$, $b + a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$$1 \times 32 = 32, 2 \times 16 = 32, 4 \times 8 = 32, \dots$$

$b - a = 4$, $b + a = 8$ 일 때 조건이 성립하므로,

$$a = 2, b = 6 \text{이다.}$$

$b + a = 16$, $b - a = 2$ 일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$$\therefore t^2 = 9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$$

13. 부등식 $a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$ 의 해가 $2 \leq x \leq 8$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a = -2, b = -1$

② $a = -1, b = 0$

③ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$

④ $a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$

⑤ $a = 2, b = -1$

해설

$$a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$$

(1) $a > 0$ 일 때,

$$a+7 \leq ax+b, x \geq \frac{a-b+7}{a}$$

$$ax+b \leq 4b+2a, x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\frac{a-b+7}{a} \leq x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\therefore \frac{a-b+7}{a} = 2, \frac{3b+2a}{a} = 8$$

$$\therefore a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$$

(2) $a < 0$ 일 때

$$\frac{3b+2a}{a} \leq x \leq \frac{a-b+7}{a}$$

$$\therefore \frac{3b+2a}{a} = 2, \frac{a-b+7}{a} = 8$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

($a < 0$ 이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.)