1. 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P$(2.4, -1)$, Q$(0,\ 6)$
② P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 6)$
③ P$(3.6,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$
④ P$(2.4, 0)$, Q$(0,\ 5)$
⑤ P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 2)$

해설

A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 P$(x,\ 0)$ 과 Q$(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$
양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ $ P$(3.6,\ 0)$
$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$
양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ $ Q$(0,\ 6)$

2. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

3. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m \neq -1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

4. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2), \mathrm{B}(3, -2)$ 를 이은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C 는 선분 AB 를 2 : 1 로 외분하는 점이므로 $\mathrm{C}(5, -6)$ 이다.

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

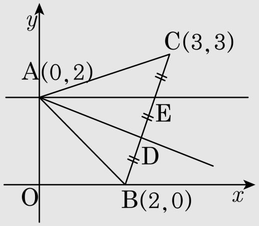
5. 점 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle \mathrm{ABC}$ 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
$\mathrm{A}(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle \mathrm{ABC}$ 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

$\mathrm{D}\left(\frac{7}{3},1\right)$, $\mathrm{E}\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$$

$\therefore\ k=-1$

6. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

7. 점 $(1,-2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4,-4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-4x+2$　② $y=4x+2$　③ $y=-4x+4$

④ $y=4x+4$　⑤ $y=-4x+6$

해설

$(1,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y+2=m(x-1)\cdots$①이라 하면

①식을 점 $(2,3)$에 대칭이동하면 (중점공식이용)

$x\to 4-x\ y\to 6-y$이므로

$6-y+2=m(4-x-1),\ y=m(x-3)+8\cdots$②

직선 ②를 x축에 대칭이동하면

$-y=m(x-3)+8\quad\cdots$③

직선 ③이 점 $(4,-4)$를 지나므로

$4=m(4-3)+8\ \therefore m=-4$

따라서 처음 직선의 방정식 ①은

$y+2=-4(x-1),\ y=-4x+2$

8. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

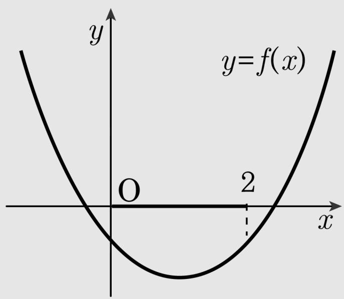
$$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$$

9. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

10. 원 $x^2+y^2=1$과 직선$ax+by+c=0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c=b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c=2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c=\sqrt{a^2+b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax+by+c=0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

㉠ $d=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A\cap B)=2$

㉡ $d=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq\dfrac{2b}{\sqrt{2}b}>1$ $(\because\ b\geq a)$

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

그러므로 교점은 1 개다.

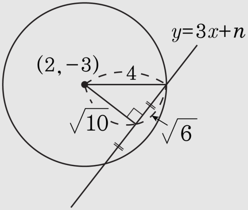
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

11. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18　② 18　③ -22　④ 22　⑤ 0

해설

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2,\ -3)$ 의 거리

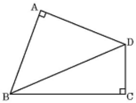
$$\frac{|6+3+n|}{\sqrt{3^2+1}} = \sqrt{10}$$

$|9+n| = 10$

$\therefore\ n = \pm 10 - 9 = 1\ or\ -19$

$\therefore\ 1 - 19 = -18$

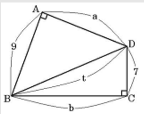
12. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 7$, $\angle BAD = \angle BCD = 90°$이 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t라 할 때, t^2의 값을 구하면?



① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BD} = t$라 할 때,



$9^2 + a^2 = 7^2 + b^2$, $b^2 - a^2 = 32$

(자연수이므로, $b > a$)

$(b-a)(b+a) = 32 \Rightarrow$ 부정방정식

$b > a$이므로

$b-a$, $b+a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$1 \times 32 = 32$, $2 \times 16 = 32$, $4 \times 8 = 32$, $\cdots$

$b - a = 4$, $b + a = 8$일 때 조건이 성립하므로,

$a = 2$, $b = 6$이다.

$b + a = 16$, $b - a = 2$일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$\therefore\ t^2 = 9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$

13. 부등식 $a+7 \le ax+b \le 4b+2a$ 의 해가 $2 \le x \le 8$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a=-2,\ b=-1$
② $a=-1,\ b=0$
③ $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{7}{3}$
④ $a=\frac{7}{3},\ b=\frac{14}{3}$
⑤ $a=2,\ b=-1$

해설

$a+7 \le ax+b \le 4b+2a$

(1) $a>0$ 일 때,

$$a+7 \le ax+b,\ x \ge \frac{a-b+7}{a}$$

$$ax+b \le 4b+2a,\ x \le \frac{3b+2a}{a}$$

$$\frac{a-b+7}{a} \le x \le \frac{3b+2a}{a}$$

$$\therefore \frac{a-b+7}{a}=2,\ \frac{3b+2a}{a}=8$$

$$\therefore a=\frac{7}{3},\ b=\frac{14}{3}$$

(2) $a<0$ 일 때

$$\frac{3b+2a}{a} \le x \le \frac{a-b+7}{a}$$

$$\therefore \frac{3b+2a}{a}=2,\ \frac{a-b+7}{a}=8$$

$$\therefore a=1,\ b=0$$

($a<0$ 이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.)