1. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

2. 두 원 O와 O′의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

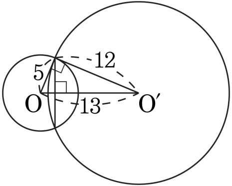
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

△OO′A는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2}\times 5\times 12=\frac{1}{2}\times 13\times \frac{x}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{120}{13}$$



3. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

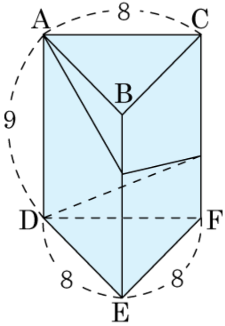
원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$$

또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$$

4. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

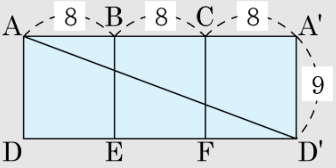


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



5. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$와 $\triangle\mathrm{OAP}$의 높이가 같으므로

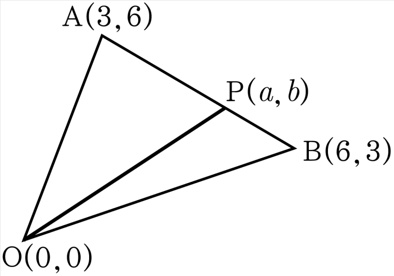
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$이려면

P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.

따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{12+3}{3}, \dfrac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



6. 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y=x-1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

$2x+(k+2)y-8=0\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=x-1$,

즉 $x-y-1=0$ 이 수직이므로

$2\cdot 1+(k+2)(-1)=0 \quad \therefore k=0$

7. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x,y)=0$ 일 때, $f(x-a,\ y-b)=0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4 ② 1, 4, 5 ③ −2, 2, −6

④ 4, 5, 6 ⑤ −1, 3, 4

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 이다.

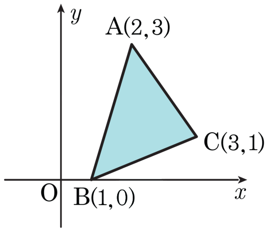
이 원을 x 축으로 a 만큼, y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

따라서 $a+b = 2$ 또는 -2 또는 -6

8. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

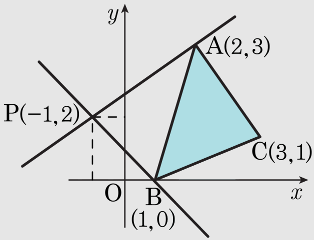


① $-1 \le m \le 3$ ② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$ ④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$

⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 $P(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\dfrac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\dfrac{2-3}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3} \le m \le 1$

9. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$인 원을 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동 하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=1$ ② $a^2+b^2=4$ ③ $a^2+b^2=9$

④ $a^2+b^2=16$ ⑤ $a^2+b^2=25$

해설

$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \cdots$ ㉠

원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼,

y 의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=4$

$\{x-(a+1)\}^2+\{y-(b-2)\}^2=4 \cdots$ ㉡

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$\therefore\ d=\sqrt{(a+1-1)^2+(b-2+2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}=2+2=4$

$\therefore\ a^2+b^2=16$

10. 두 점 $\mathrm{A}(4,1), \mathrm{B}(5,1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 9 ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $\mathrm{A}(4,1)$의 대칭점을 $\mathrm{C}(a,b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점

$\mathrm{M}\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $x-y+1=0$위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0$$

$\therefore a-b+5=0 \quad \cdots ①$

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$$\frac{b'-1}{a-4}\times 1=-1$$

$\therefore a+b-5=0 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore \mathrm{C}(0,5)$

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 대칭점 $\mathrm{D}(0,6)$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 5-\frac{1}{2}\times 4\times 4=\frac{9}{2}$

11. 정점 $A(4, 2)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$에 대한 대칭점은 $A'(2, 4)$

x축에 대한 대칭점은 $A''(4, -2)$이므로

$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \geq \overline{A'A''}$

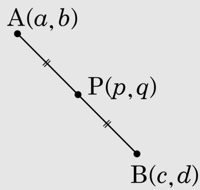
$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$

12. 점 $(p,\ q)$ 의 점 $(-3,\ 2)$ 에 대한 대칭점을 점$(m,\ n)$ 이라 하고, 점 $(p,\ q)$ 가 직선 $y=-3x+2$ 위를 움직일 때, 점 $(m,\ n)$ 이 움직이는 도형의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$ 는 서로 소이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b+c=20$

해설



점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 가 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$ 에 대하여 대칭이면

($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점의 좌표) = (점 P 의 좌표)

두 점 $(p,\ q)$, $(m,\ n)$ 의 중점이 점 $(-3,\ 2)$ 이므로

$$\left(\frac{p+m}{2},\ \frac{q+n}{2}\right)=(-3,\ 2)$$

$\therefore\ p=-m-6,\ \ q=-n+4$

또한 점 $(p,\ q)$ 는 직선 $y=-3x+2$ 위를 움직이므로

$q=-3p+2$ 즉, $-n+4=-3(-m-6)+2$,

$3m+n+16=0$

$\therefore$ 점 $(m,\ n)$ 이 움직이는 도형의 방정식은

$3x+y+16=0$

따라서, $a=3,\ b=1,\ c=16$이므로

$a+b+c=20$