1. 두 점 A $(3,-2)$, B $(-1,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -1)$　② $(-1,\ 0)$　③ $(1,\ 0)$

④ $(2,\ 0)$　⑤ $(2,\ -1)$

해설

x 축 위의 점을 P $(x,0)$ 이라 하면 $(x-3)^2+2^2=(x+1)^2+2^2$

$\Rightarrow x=1$

2. 세 점 $A(-1,-1)$, $B(1,-5)$, $C(3,1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 어떤 삼각형인가?

① 이등변삼각형이다.

② 정삼각형이다.

③ $\angle A$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.

④ $\angle B$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.

⑤ 예각삼각형이다

해설

두 점 사이의 거리를 모두 구해본다.

$\overline{AB} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$

$\triangle ABC$는 $\angle A$가 직각인 직각이등변삼각형

3. 두 점 A $(1, -5)$, B $(6, 5)$를 잇는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점 P (x, y)의 좌표는?

① $(3, -1)$ ② $(3, 2)$ ③ $(1, 3)$

④ $(2, 2)$ ⑤ $(2, 1)$

해설

공식에 의하여

$$\left(\frac{2\times 6+3\times 1}{2+3}, \frac{2\times 5+3\times(-5)}{2+3}\right)$$

$= (3, -1)$

4. 세 꼭짓점 $A(0,0)$, $B(-5,5)$, $C(2,7)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 4)$ ③ $(-2,\ 1)$

④ $(2,\ -2)$ ⑤ $(-4,\ -8)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{0+(-5)+2}{3},\ \frac{0+5+7}{3}\right)=(-1,4)$$

5. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

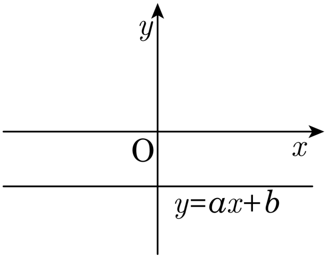
① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 높이가 같으므로
$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle$AOC 의 넓이는 $\triangle$BOC 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

6. 다음 그림과 같이 $y=ax+b$의 그래프가 x축에 평행인 직선일 때, $y=bx+a-2$의 그래프가 반드시 지나는 사분면을 모두 고르면?

㉠ 제1사분면	㉡ 제2사분면
㉢ 제3사분면	㉣ 제4사분면

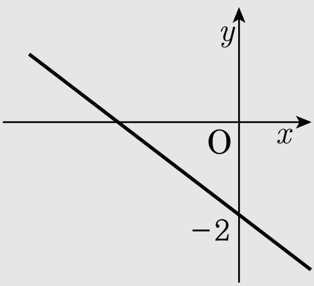


① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

주어진 직선 $y=ax+b$의 그래프가
x축과 평행하면서 x축 아래쪽에
놓여 있으므로 $a=0,\ b<0$이다.
이 때, $y=bx+a-2$에서
기울기 : $b<0$, y절편 : $a-2=-2<0$이므로
직선 $y=bx=a-2$의 그래프는
다음 그림과 같다.
따라서 이 직선의 그래프가 반드시 지나는
사분면은 제 2, 3, 4사분면이다.



7. $3x+4y-2=0$에 수직이고, 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기와 y 절편의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $3x+4y-2=0$ 의 기울기는

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ 에서 $-\frac{3}{4}$

따라서 이 직선의 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다.

$y-2=\frac{4}{3}(x-1)$

$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

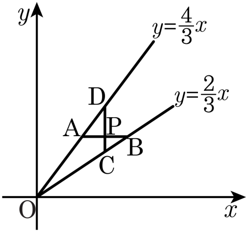
8. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0　② 3　③ 6　④ −6　⑤ −3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

9. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$

② $\frac{8}{9}$

③ $\frac{9}{8}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{DP}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$$

10. 곡선 $y=x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$ ② $a+b+c=1$ ③ $abc=1$

④ $a+c=2b$ ⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{c^3-a^3}{c-a}$$

즉, $b^2+ab+a^2=c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

11. 두 점 $(2,\ 3)$, $(1,2)$를 지나는 직선 위에 두 직선 $y-3x-4=0$, $y-ax-2=0$의 교점이 있다고 할 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$를 지나는
직선과 직선 $y-3x-4=0$의 교점이
직선 $y-ax-2=0$ 위에 있다.
두 점 $(2,\ 3)$, $(1,2)$를 지나는 직선은

$$y-2=\frac{3-2}{2-1}(x-1)$$

$\therefore\ y=x+1$

따라서 두 직선

$y-3x-4=0$과 $y=x+1$의 교점은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

교점이 $y-ax-2=0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a-2=0$$

$$\therefore\ a=\frac{5}{3}$$

12. 함수 $f(x)=ax+1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$　② $(1,1)$　③ $(0,1)$

④ $(-1,0)$　⑤ $(0,-1)$

해설

함수 $f(x)=ax+1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

13. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때 최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

14. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2\cdot 3-6\cdot 6|=15$$

15. 좌표평면 위의 네 점 $A(1,2)$, $P(0,b)$, $Q(a,0)$, $B(5,1)$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

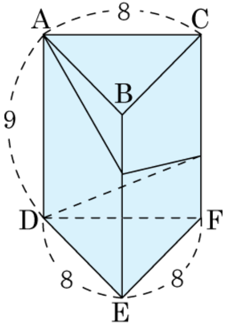
점 A $(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-1,2)$, 점 $B(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $B'(5,-1)$이라 하면

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

16. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

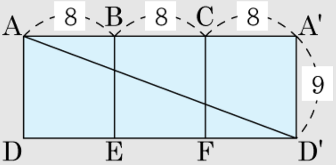


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



17. 세 점 $A(2,1), B(1,3), C(2,0)$에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$

④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2\\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1\\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2\\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9\\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2\\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2\\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$에서

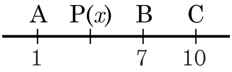
$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

18. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 P(x)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서 $x=6$일 때 최소가 된다.

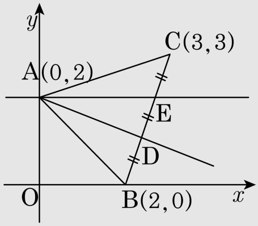
19. 점 A$(0,2)$, B$(2,0)$, C$(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle$ABC 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
A$(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle$ABC 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

D$\left(\frac{7}{3},1\right)$, E$\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

20. 세 직선 $x+y+2=0,\ x-y-4=0,\ 3x-ky-9=0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

① $-3 \le k \le 3,\ k < -6$

② $k=2,\ k=\pm 3$

③ $-3 < k < 3,\ k > 6$

④ $k \ne 2,\ k \ne \pm 3$

⑤ $-3 < k$ 또는 $k > 3$

해설

$$\begin{cases} x+y+2=0 & \cdots ㉠ \\ x-y-4=0 & \cdots ㉡ \\ 3x-ky-9=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

㉠, ㉡ 의 교점은 $(1,\ 3)$ 이 ㉢위에 있지 않다.

$\therefore\ 3+3k-9 \ne 0 \qquad \therefore\ k \ne 2$

㉠, ㉢ 은 평행하지 않으므로

$\dfrac{1}{3} \ne \dfrac{1}{-k} \ \rightarrow\ k \ne -3$

㉡, ㉢ 은 평행하지 않으므로,

$\dfrac{1}{3} \ne \dfrac{-1}{-k} \ \rightarrow\ k \ne 3$

$\therefore\ k \ne 2,\ k \ne \pm 3$

21. 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 6) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 G(2,3) , 직선 OA 의 방정식은

$y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

22. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$$3x - y - 6 = 0\ , \qquad 3x - y + k = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선 $3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$|6 + k| = 10$

따라서 $k = 4$ $(\because \ k$ 는 양수$)$

23. 점 $(5,\ 3)$ 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x,\ 12x-5y-19=0$

② $y=1,\ 12x-5y-19=0$

③ $y=1,\ 12x-5y+5=0$

④ $y=1,\ 4x-5y-8=0$

⑤ $y=-1,\ 12x+5y-12=0$

해설

점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라
하면 $y-1=m(x-2) \quad \cdots ㉠$
점 $(5,\ 3)$ 과 직선 ㉠사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|\,m(5-2)-3+1\,|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$(3m-2)^2=4(m^2+1)$

$5m^2-12m=0$

$\therefore\ m=0,\ \dfrac{12}{5}$

㉠에 대입하면 $y=1,\ 12x-5y-19=0$

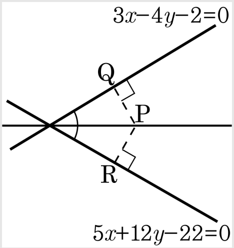
24. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

25. 점 $\mathrm{A}(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

$\mathrm{P}\ (a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 $\mathrm{Q}\ (x,\ y)$라 하면

$$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18\ ,\ b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$