1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0,\ (x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3,\ \dfrac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore \ x=-1, 1, 2$

$\therefore \ -1+1+2=2$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

5. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x-y=4x+10=x+y-5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-5$

▷ 정답 : $y=0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x-y=4x+10 \\ 2x-y=x+y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y+10=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x=2y-5 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y-5)+y+10=0$

$\therefore\ y=0$

$y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=-5$

$\therefore\ x=-5,\ y=0$

6. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$　② $-2,\ 1,\ -3$　③ $2,\ 1,\ -3$

④ $-2,\ -1\pm\sqrt{2}i$　⑤ $2,\ -1\pm\sqrt{2}i$

해설

준식$=x(x^2-1)-6=x^3-x-6=0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\
 & & 2 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=2, -1\pm\sqrt{2}i$

7. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$

$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$

$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$

$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$

근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

8. 사차방정식 $x^4-11x^2+30=0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4-11x^2+30=0$

$(x^2-5)(x^2-6)=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5},\ x=\pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a=-\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b=\sqrt{6}$

$\therefore\ a^2+b^2=6+6=12$

9. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

10. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$$

$$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$$

$\therefore\ a+b=-10$

11. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$x = -1$을 대입하면

$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$에서 $\alpha + \beta = 5$

$\therefore k + \alpha + \beta = 11$

12. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

13. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5,\ 2x^2 + 2x - 4 = 0,$

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2,$

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \cdots ㉠ \\ x - y = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$또는 $x=r,\ y=s$이다. $p+q+r+s$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

16. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2, \ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a,\ y = b$라 할 때, ab의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots$ ㉠

$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3,\ xy = 2$

$\therefore \quad ab = 2$

20. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

21. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7 ② 11 ③ 15 ④ 19 ⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ이므로$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$

$=8+8-6+1=11$

22. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

23. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\quad\therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

24. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2 - 2x + a^2 = 0 & \cdots ㉠ \\ x^2 - ax + 2a = 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a = 0$일 때 $k = 0$, $a = -1$일 때, $k = 1$

② $a = 2$일 때 $k = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $a = 1$일 때 $k = 1$, $a = 2$일 때, $k = 1$

④ $a = 3$일 때 $k = 2 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = 2$일 때 $k = -1$, $a = 3$일 때, $k = 1$

해설

공통근을 $x = k$라 하면

$k^2 - 2k + a^2 = 0 \quad \cdots$①

$k^2 - ka + 2a = 0 \quad \cdots$②

두 식을 빼주면, $(k + a)(a - 2) = 0$

$\therefore a = 2$ 또는 $k = -a$

i) $a = 2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ii) $k = -a$일 때

①에 넣으면 $a = 0$또는 $a = -1$

$\begin{cases} a = 0 \text{ 이면 } k = 0 \\ a = -1 \text{ 이면 } k = 1 \end{cases}$

25. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

26. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y$, $y-1$은 실수이므로 $x+2y=0$, $y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

27. 방정식 $2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-8x+16)=0,$

$(x-2y)^2+(x-4)^2=0$

$x=2y, x=4$

$\therefore\ x=4, y=2 \quad \therefore\ xy=8$

28. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

29. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$

$\therefore \quad x = 10$ 이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

30. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

31. x의 3차방정식 $x^3-(3k+1)x+3k=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① $\frac{7}{12}$　② $\frac{7}{5}$　③ $\frac{7}{4}$　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x-3k)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+x-3k=0$

여기에서 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때는 $D=1+12k=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{12}$

또, $x^2+x-3k=0$이 $x=1$이라는 근을 가져도 그 근은 중근이 되므로

$1+1-3k=0$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{-1+8}{12}=\frac{7}{12}$

32. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$의 세 근일 때, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$　　② $x^3 - ax - 3 = 0$

③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$　　④ $x^3 + ax + 3 = 0$

⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$x^3 - ax - 3$

$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$= 0$에서

$\alpha + \beta + \gamma = 0,$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a,\ \alpha\beta\gamma = 3$

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\dfrac{\gamma}{\gamma^2} = -\dfrac{1}{\gamma},$

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = -\dfrac{\alpha}{\alpha^2} = -\dfrac{1}{\alpha},$

$\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2} = -\dfrac{\beta}{\beta^2} = -\dfrac{1}{\beta}$

따라서, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$\left(x + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(x + \dfrac{1}{\gamma}\right)$

$= x^3 + \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+ \left(\dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$= x^3 + \left(-\dfrac{a}{3}\right)x^2 + \dfrac{1}{3} = 0$

$\therefore\ 3x^3 - ax^2 + 1 = 0$

33. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α,β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

34. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$

35. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$$
$$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$$
$$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$$

36. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,

$\omega^3=1,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도

$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

㉠ $\omega^3=1,\ (\omega^3)^2=1 \rightarrow$(○)

㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$

$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$

$\omega^2+\omega+1$을 이용.

$\omega+1=-\omega^2$ 이므로 $\overline{\omega}=\omega^2 \rightarrow$(○)

㉡ 두 근 $\omega, \overline{\omega}$의 합은

$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로

$\omega+\overline{\omega}=-1$

㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$

$\omega^2+\omega=-1 \rightarrow$(○)

37. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $-\dfrac{w+1}{w^2} + \dfrac{1+w^2}{w}$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x^3 = 1$,

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이 된다.

즉, $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$-\dfrac{\omega+1}{\omega^2} + \dfrac{1+\omega^2}{\omega}$

$= \dfrac{\omega^2}{\omega^2} + -\dfrac{\omega}{\omega}$

$= 1 - 1 = 0$

38. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄴ $\omega^2 = 1$

ㄷ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$

ㄹ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

ㅁ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㄱ, ㄴ

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㄷ

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㄹ

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㅁ

39. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4(m^2-1)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4(m^2-1)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.

40. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$