1. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

2. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$

$\therefore x^3 = 1$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면

$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$

$\therefore \ a = 3$

3. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$
④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$A=\dfrac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$

4. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　　② $a+b=x+y$　　③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$　　⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수$)$
따라서, $ay=bx$ 에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

5. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \quad \vdots$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

6. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

7. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.
양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면
$x=2$일 때
$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$
$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$
$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$ ㉠
$x=-2$일 때
$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$
$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$
$\therefore\ -2A+B=6\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$
$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

8. $(m^2-4)x-1=m(3x+1)$를 만족하는 x가 없도록 하는 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(m^2-3m-4)x-1-m=0$의 해가 없으므로

$m^2-3m-4=0$ 이고 $-m-1 \neq 0$

$\therefore m=4$

9. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$
위의 식에 $x=1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
$\therefore$ (계수의 총합) $=2^5\times(-2)^4=512$

10. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① $-\frac{19}{3}$　② $-\frac{25}{6}$　③ $-\frac{29}{6}$　④ $-\frac{14}{3}$　⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$
$f(x) = (x+1)Q1(x) + 5$으로 놓으면 $f(-1) = 5$
$f(x) = (x-2)Q'(x)$으로 놓으면 $f(2) = 0$
따라서, $f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$
$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$
두 식을 연립하여 풀면 $m = \frac{1}{6}$, $n = -\frac{29}{6}$
$\therefore\ m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$

11. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$
$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$x=1, x=-1$ 을 대입한다.
$4f(1)=12=a+b\cdots㉠$
$2f(-1)=-2=-a+b\cdots㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면,
$a=7,\ b=5$
$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$
$R(1)=12$

12. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

13. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$
$\quad=(x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$
$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

14. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \multicolumn{1}{|c}{i} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \multicolumn{1}{|c}{a+b+c+1} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

15. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$을 인수분해 하면?

① $(x^2-x-5)(x^2+x-9)$　② $(x^2-x-5)(x^2-x-9)$
③ $(x^2+x+5)(x^2+x+9)$　④ $(x^2+x-5)(x^2+x-9)$
⑤ $(x^2-x+5)(x^2+x+9)$

해설

(준식) $=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+21$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$
$x^2+x=A$로 치환하면,
$(A-2)(A-12)+21=A^2-14A+45$
$=(A-9)(A-5)$
$\therefore\ (x^2+x-9)(x^2+x-5)$

16. n^4-6n^2+25의 값이 소수가 되게 하는 정수 n의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 없다 ⑤ 무수히 많다

해설

$p=n^4-6n^2+25$
$=n^4+10n^2+25-16n^2$
$=(n^2+5)^2-(4n)^2$
$=(n^2+4n+5)(n^2-4n+5)$
p가 소수이므로 $n^2+4n+5=1$
또는 $n^2-4n+5=1$이어야 한다.
$n^2+4n+4=(n+2)^2=0$에서 $n=-2$
$n^2-4n+4=(n-2)^2=0$에서 $n=2$
따라서 구하는 n은 두 개이다.

17. 다음 중 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+2$ ② $x-y+2$ ③ $x+2y+1$
④ $x-2y+1$ ⑤ $x+y+1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$
$=(x+2y+1)(x+y-2)$

18. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2-\boxed{\text{(가)}}a+\boxed{\text{(나)}}(b-c)\\&=\boxed{\text{(다)}}\{a^2-\boxed{\text{(라)}}a+\boxed{\text{(나)}}\}\\&=(b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}\end{aligned}$$

① (가) (b^2-c^2)　② (나) bc　③ (다) $(b-c)$
④ (라) $(b+c)$　⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\&=(b-c)a^2-\boxed{(b^2-c^2)}a+\boxed{bc}(b-c)\\&=\boxed{(b-c)}\left\{a^2-\boxed{(b+c)}a+\boxed{bc}\right\}\\&=(b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}\end{aligned}$$

19. 다음 중 $x^4-4x^3-7x^2+34x-24$를 인수분해 하였을 때, 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+3$ ④ $x+4$ ⑤ $x-4$

해설

$f(x)=x^4-4x^3-7x^2+34x-24$라 하면
$f(1)=f(2)=0$이므로
$f(x)$ 는$x-1, x-2$를 인수로 갖는다.
조립제법을 해 보면 즉,
$x^4-4x^3-7x^2+34x-24$
$=(x-1)(x-2)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$이고, 최소공배수가 $x^3-3x^2-4x+12$일 때, 이 두 다항식의 합을 구하면?

① x^2-x-10 ② $2x^2-x-10$ ③ x^2-x-12
④ $2x^2-x-20$ ⑤ $2x^2+x-10$

해설

a, b가 서로소일 때, 두 다항식이 $(x+2)a, (x+2)b$이면 최소공배수는 $(x+2)ab$이다.

$x^3-3x^2-4x+12=(x+2)ab$
$=(x+2)(x-2)(x-3)$

따라서 두 다항식은 각각
$(x+2)(x-2), (x+2)(x-3)$
∴(두 다항식의 합)
$=(x+2)(x-2)+(x+2)(x-3)$
$=2x^2-x-10$

21. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　　② 7, 18　　③ 8, 16
④ 9, 18　　⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$

22. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합 (상수항 포함) 과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$
$x=3$ 을 대입하면 $3^{30}=R$
$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로
$x=1$ 을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\frac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\frac{3^{30}-1}{2}=\frac{3^{30}+1}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$

23. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

24. 두 다항식 x^2-3x+a와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. 이 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2-3x+a,\ x^2+bx-6$은
$(x-1)$을 인수로 가지므로 $a=2, b=5$
$\therefore\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$
$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+6)$
$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지 $f(2)=0$

25. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $A,\ B$에 대하여 $A,\ B$의 최대공약수를 $(A,\ B)$, $A,\ B$의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 $A,\ B$가

$$(A+B,\ A-B)=2x-3,\ [A+B,\ A-B]=2x^2+x-6$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$　② x^3+4x^2-2x-7
③ x^3-3x^2+5x-1　④ $3x^3-x^2+2x-1$
⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG$ (a,b는 서로소)라 하자.
$(A+B,A-B)=((a+b)G,\ (a-b)G)=2x-3$ 이므로
G는 $2x-3$
따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 $a,\ b$는 일차식이다.
또 $[A+B,A-B]=[(a+b)G,(a-b)G]=2x^2+x-6$
$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$
$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고
$a,\ b$는 모두 일차식이므로
$a+b=x+2,\ a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore\ [A,B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$
$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$
$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$\therefore\ 2[A,B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$
따라서 $2[A,B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.