

1. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$, $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A = x^3 + x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

② $A = x^3 - x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③ $A = x^3 - x^2 + x - 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④ $A = x^3 - x^2 - x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤ $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

2. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3

② 3

③ -6

④ 6

⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$$\therefore a - 3 = 0, a = 3$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는 x 값을 대입한다.

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면

$$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

3. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식} : 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

4. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax + by = 0$

② $a + b = x + y$

③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

④ $x = y$

⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0 \text{ 을}$$

간단히 정리하면

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$$

$$\text{즉, } (ay - bx)^2 = 0$$

$$\therefore ay - bx = 0 (\because a, x, b, y \text{ 는 실수})$$

$$\text{따라서, } ay = bx \text{ 에서 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

5. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32} - 1$

② $2^{32} + 1$

③ $2^{31} - 1$

④ $2^{31} + 1$

⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$P = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= \vdots$$

$$= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$$

$$= 2^{32} - 1$$

6. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

$$\begin{aligned}\text{대각선 : } d^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & \therefore d &= \sqrt{14} \\ &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= 6^2 - 22 = 14\end{aligned}$$

7. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 - x - 3}{x + 1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax + B}{x(x - 1)(x + 1)}$ 에서 $A - B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x = 2$, $x = -2$ 를 대입해서 정리하면

$x = 2$ 일 때

$$\frac{4 - 6 - 1}{1} - \frac{4 - 2 - 3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A + B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A + B}{6}$$

$$\therefore 2A + B = -10 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = -2$ 일 때

$$\frac{4 + 6 - 1}{-3} - \frac{4 + 2 - 3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A + B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A + B}{-6}$$

$$\therefore -2A + B = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $A = -4$, $B = -2$

$$\therefore A - B = (-4) - (-2) = -2$$

8. $(m^2 - 4)x - 1 = m(3x + 1)$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 상수 m 의 값은?

① -1

② -2

③ -4

④ 4

⑤ 5

해설

$(m^2 - 3m - 4)x - 1 - m = 0$ 의 해가 없으므로

$m^2 - 3m - 4 = 0$ 이고 $-m - 1 \neq 0$

$\therefore m = 4$

9. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$$

위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$$\therefore (\text{계수의 총합}) = 2^5 \times (-2)^4 = 512$$

10. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{19}{3}$

② $-\frac{25}{6}$

③ $-\frac{29}{6}$

④ $-\frac{14}{3}$

⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$$

$$f(x) = (x+1)Q_1(x) + 5 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 5$$

$$f(x) = (x-2)Q'(x) \text{ 으로 놓으면 } f(2) = 0$$

$$\text{따라서, } f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$

$$(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$$4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면,

$$a = 7, b = 5$$

$$\therefore \text{나머지 } R(x) = 7x + 5$$

$$R(1) = 12$$

12. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\&= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\&= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\&= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1\end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

13. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ &= (x + 2)(x - 1)Q(x) \end{aligned}$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

14. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

1	1	a	b	c
		d	e	f
	1	g	h	i

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	b	c
		1	$a+1$	$a+b+1$
	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$

이때 $a+b+c+1=1$ 이므로

$$a+b+c=0$$

따라서 ③이다.

15. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4) + 21$ 를 인수분해 하면?

① $(x^2 - x - 5)(x^2 + x - 9)$

② $(x^2 - x - 5)(x^2 - x - 9)$

③ $(x^2 + x + 5)(x^2 + x + 9)$

④ $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 9)$

⑤ $(x^2 - x + 5)(x^2 + x + 9)$

해설

$$(\text{준식}) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 21$$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 21$$

$x^2 + x = A$ 로 치환하면,

$$(A-2)(A-12) + 21 = A^2 - 14A + 45$$

$$= (A-9)(A-5)$$

$$\therefore (x^2 + x - 9)(x^2 + x - 5)$$

16. $n^4 - 6n^2 + 25$ 의 값이 소수가 되게 하는 정수 n 의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 4 개

④ 없다

⑤ 무수히 많다

해설

$$\begin{aligned} p &= n^4 - 6n^2 + 25 \\ &= n^4 + 10n^2 + 25 - 16n^2 \\ &= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2 \\ &= (n^2 + 4n + 5)(n^2 - 4n + 5) \end{aligned}$$

p 가 소수이므로 $n^2 + 4n + 5 = 1$

또는 $n^2 - 4n + 5 = 1$ 이어야 한다.

$$n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 = 0 \text{ 에서 } n = -2$$

$$n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2 = 0 \text{ 에서 } n = 2$$

따라서 구하는 n 은 두 개이다.

17. 다음 중 다항식 $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$ 의 인수인 것은?

① $x + y + 2$

② $x - y + 2$

③ $x + 2y + 1$

④ $x - 2y + 1$

⑤ $x + y + 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + (2y + 1)(y - 2) \\ &= (x + 2y + 1)(x + y - 2) \end{aligned}$$

18. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 않은 것은?

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{\text{(가)}}a + \boxed{\text{(나)}}(b-c) \\
 &= \boxed{\text{(다)}} \{a^2 - \boxed{\text{(라)}}a + \boxed{\text{(나)}}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
 \end{aligned}$$

① (가) $(b^2 - c^2)$

② (나) bc

③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$

⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2 - c^2)}a + \boxed{bc}(b-c) \\
 &= \boxed{(b-c)} \{a^2 - \boxed{(b+c)}a + \boxed{bc}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
 \end{aligned}$$

19. 다음 중 $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x - 2$

③ $x + 3$

④ $x + 4$

⑤ $x - 4$

해설

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 라 하면

$f(1) = f(2) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1, x - 2$ 를 인수로 갖는다.

조립제법을 해 보면 즉,

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 12)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x + 3)$$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$ 이고, 최소 공배수가 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ 일 때, 이 두 다항식의 합을 구하면?

① $x^2 - x - 10$

② $2x^2 - x - 10$

③ $x^2 - x - 12$

④ $2x^2 - x - 20$

⑤ $2x^2 + x - 10$

해설

a, b 가 서로소일 때, 두 다항식이 $(x+2)a, (x+2)b$ 이면 최소공배수는 $(x+2)ab$ 이다.

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 - 4x + 12 &= (x+2)ab \\ &= (x+2)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식은 각각

$$(x+2)(x-2), (x+2)(x-3)$$

∴(두 다항식의 합)

$$\begin{aligned}&= (x+2)(x-2) + (x+2)(x-3) \\ &= 2x^2 - x - 10\end{aligned}$$

21. $x + \frac{1}{x} = 3$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면?
(단, $x > 0$)

① 5, 6

② 7, 18

③ 8, 16

④ 9, 18

⑤ 10, 27

해설

$$x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$$

22. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

23. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

24. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6 \text{은} \\ & (x - 1) \text{을 인수로 가지므로 } a = 2, b = 5 \\ & \therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) \\ & x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1) \\ & f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6) \\ & f(x) \text{를 } x - 2 \text{로 나눈 나머지 } f(2) = 0 \end{aligned}$$

25. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차다항식 A, B 에 대하여 A, B 의 최대공약수를 (A, B) , A, B 의 최소공배수를 $[A, B]$ 라 하자. 다항식 A, B 가

$$(A + B, A - B) = 2x - 3, [A + B, A - B] = 2x^2 + x - 6$$

을 만족할 때, $2[A, B] = 0$ 과 같은 해를 갖는 것은?

- ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ ② $x^3 + 4x^2 - 2x - 7$
 ③ $x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ ④ $3x^3 - x^2 + 2x - 1$
 ⑤ $-x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소) 라 하자.

$(A + B, A - B) = ((a + b)G, (a - b)G) = 2x - 3$ 이므로
 G 는 $2x - 3$

따라서 A, B 는 $2x - 3$ 으로 나누어떨어지고 a, b 는 일차식이다.

또 $[A + B, A - B] = [(a + b)G, (a - b)G] = 2x^2 + x - 6$
 $= (x + 2)(2x - 3)$ 이므로 $(a + b)(a - b)G = (x + 2)(2x - 3)$

$\therefore (a + b)(a - b) = x + 2$ 이고

a, b 는 모두 일차식이므로

$a + b = x + 2, a - b = 1$ 이라 하고 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore [A, B] = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) (2x - 3)$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right) (2x - 3)$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{4}x^2 - 3x + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$$

$$\therefore 2[A, B] = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$$

따라서 $2[A, B]$ 와 같은 것은 ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ 이다.