**1.** 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수 $x$가 존재하기 위한 상수 $a$의 값의 범위는?

① $a>1$ ② $a<-\frac{1}{3}$ ③ $a \geq -\frac{1}{3}$
④ $a \leq -\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}<a<1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 $x$에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a<0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a<0$이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면
$a<0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 $D$라 할 때,
$D=(a+10)^2-4a^2<0, \ -3a^2+2a+1<0$
$3a^2-2a-1>0, \ (3a+1)(a-1)>0$
$\therefore a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a<-\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

**2.** 두 점 A(1, 2), B(7, 5)를 잇는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점을 $P(x, y)$라고 하면,

$x = \dfrac{1\times 7 + 2\times 1}{3} = \dfrac{9}{3} = 3,$

$y = \dfrac{1\times 5 + 2\times 2}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$

$\overline{AB}$를 1 : 2으로 외분하는 점 $Q(x, y)$라고 하면,

$x = \dfrac{7-2}{-1} = -5,$

$y = \dfrac{5-4}{-1} = -1$

$\therefore\ P(3, 3),\ Q(-5, -1)$

$\overline{PQ} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

**3.** 두 점 $\mathrm{A}(a,4)$, $\mathrm{B}(1,b)$에서 같은 거리에 있는 $x$축 위의 점을 $P$, $y$축 위의 점을 $Q$라 하면, $\triangle \mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1,1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① $-1$ ② $-2$ ③ $-3$ ④ $-4$ ⑤ $-5$

해설

$\mathrm{P}(x,0)$, $\mathrm{Q}(0,y)$라 하면,

$\dfrac{0+x+0}{3}=-1$, $\dfrac{0+0+y}{3}=1$에서

$x=-3$, $y=3$

$\therefore \mathrm{P}(-3,0), \mathrm{Q}(0,3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+3)^2+4^2=(1+3)^2+b^2$

$a^2+6a+9=b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{QB}}^2$에서

$a^2+(4-3)^2=1^2+(b-3)^2$

$a^2=b^2-6b+9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a-b=-3$

**4.** 두 직선 $kx+2y+3=0,\ 2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 $k$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
$y$절편은 달라야 한다.

$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4}\quad\therefore\ k^2=4$

따라서 양수 $k$의 값은 2이다.

**5.** 점 A$(-2,1)$, B$(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 $l$ 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선$l$ 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\times 4+1\times(-2)}{2+1},\frac{2\times 4+1\times 1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 $l$ 은 기울기가 $-2$ 이고

$(2,3)$을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 $l$ 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot 1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

**6.** 점 $\mathrm{P}(1,2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)
= (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**7.** 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b\neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은
$y=m(x-1)+2$ 에서,
$mx-y-m+2=0\cdots$㉠
여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m=\frac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0,$
$3x-4y+5=0$
$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

**8.** $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, $pq$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 $-1$ 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

**9.** 부등식 $|x|+|x-2| \le 3$을 풀면 $m \le x \le n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

i) $x < 0$일 때

$-x - x + 2 - 3 \le 0$

$-2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x < 0$

ii) $0 \le x < 2$일 때

$x - x + 2 \le 3$

$\therefore\ 0 \le x < 2$

iii) $x \ge 2$일 때

$2x - 2 \le 3$

$2x \le 5$

$\therefore\ 2 \le x \le \frac{5}{2}$

i), ii), iii)에서 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

$\therefore m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{5}{2},\ m+n = 2$

**10.** 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a + b$의 값은?
(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x] + 4)([x] - 3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a + b = 0$이다

**11.** 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$일 때, 이차부등식 $ax^2+3(b+c)x-10(b-c)<0$ 의 해는?

① $x\le -1$ ② $-1<x<0$ ③ $0<x<10$

④ $-1<x<10$ ⑤ $x>10$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가
$x<-1$ 또는 $x>2$ 이므로 $a>0$
해가 $x<-1$ 또는 $x>2$ 이고
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-2)>0 \ \therefore x^2-x-2>0$
따라서 $a=1,\ b=-1, c=-2$ 이므로
$ax^2+3(b+c)x-10(b-c)<0$ 에 대입하면
$x^2-9x-10<0,\ (x+1)(x-10)<0$
$\therefore -1<x<10$

**12.** 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2 ② $-2$ ③ 4 ④ $-4$ ⑤ 0

해설

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

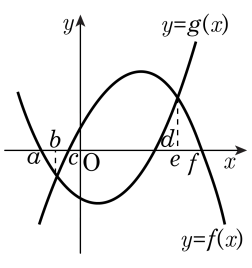
$f(4x-2)=0 \Leftrightarrow 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

**13.** 이차함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는 ?




① $a<x<c,\ d<x<f$

② $a<x<b,\ e<x<f$

③ $b<x<c,\ d<x<e$

④ $a<x<c,\ e<x<f$

⑤ $x<a,\ c<x<d,\ x>f$

해설

$f(x)g(x)>0$ 이면

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 모두 $x$ 축보다 위쪽에 있거나 또는 모두 $x$ 축보다 아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore a<x<c,\ d<x<f$

**14.** 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 $x$ 의 값의 범위가 $-1<x<\frac{3}{2}$ 일 때, 상수 $m,n$ 의 곱 $mn$ 의 값은?

① $-6$ ② $-2$ ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3$, $n=-2$
$\therefore\ mn=6$

**15.** 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$을 동시에 만족하는 $x$의 값이 존재하도록 하는 정수 $a$의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$에서
$(x-5)(x+1) < 0$이므로
$-1 < x < 5$
$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$에서
$x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)$
$= (x-a)(x-a-2) < 0$이므로
$a < x < a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a + 2 > -1$
즉 $a > -3$또는 $a < 5$에서
$-3 < a < 5$
따라서 정수 $a$의 개수는 7개다.

**16.** $x$에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 $a$의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, $k$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i ) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii ) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 i ), ii ), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

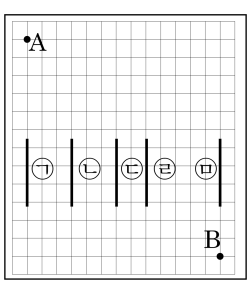
**17.** 두 점 A(3, 5), B(4, −2)에서 같은 거리에 있고 $x$축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-7, 0)$ ② $(-4, 0)$ ③ $(0, 0)$
④ $(1, 0)$ ⑤ $(3, 0)$

해설

P $(a, 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a-3)^2 + 5^2 = (a-4)^2 + 4,\ a = -7$
$\therefore$ P $= (-7, 0)$

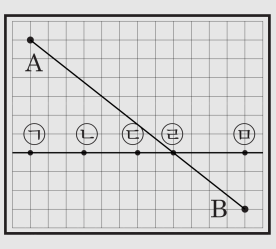
**18.** 다음 그림은 어느 운동장에 있는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5 개의 평균대를 모눈종이에 나타낸 것이다. 동현이가 A 지점에서 출발하여 평균대 위를 걸어서 지나 B 지점까지 도착하는 경기를 하려 한다. 이동 거리를 가장 짧게 하려 할 때, 지나야할 평균대는?



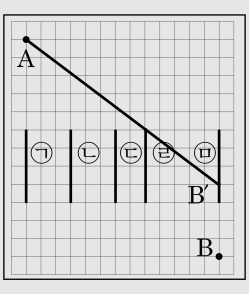

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

각 평균대의 한 끝점을 다른 한 끝점에 오도록 접으면 다음 그림과 같으므로 $\overline{AB}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 걸어서 지날 때 이동거리가 가장 짧다.




평행사변형의 성질을 이용하여 그림과 같이 B 지점에서 위로 4 칸 이동한 지점 B′ 을 잡으면 이동 거리는 A 지점에서 B′ 지점까지 이동한 후 B′ 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다.
이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'} + \overline{B'B}$ 이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 지나야 한다.



**19.** 3km 떨어진 두 마을 ㄱ, ㄴ이 있다. ㄱ마을에는 100명의 학생이, ㄴ마을에는 50명의 학생이 있다. ㄱ, ㄴ두 마을 사이에 학교를 세울 때 통학거리의 합이 최소가 되려면 어디에 학교를 세워야 하는가?

① ㄱ마을

② ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 1km지점

③ 가운데

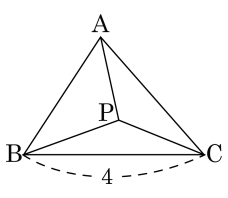
④ ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 2km지점

⑤ ㄴ마을

해설

ㄱ마을에서 $x$km 떨어진 곳에 학교를 세운다면 ㄴ마을 으로부터는 $(3-x)$km 떨어져 있다. 통학거리의 합 $S$ 는 $S = 100x+50(3-x)$
$= 150 + 50x$
$x \geq 0$ 이므로 $x = 0$ 일 때 $S$ 는 최소가 된다. 즉, ㄱ마을에 학교를 세우면 된다.

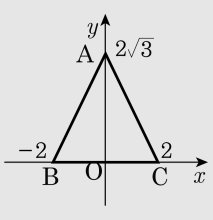
**20.** 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?




① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 $x$축,
$\overline{BC}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 $y$축으로 잡으면
$A\left(0,2\sqrt{3}\right), B(-2,0), C(2,0)$
$P(x,y)$라 하면




$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$

$=3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$

$=3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은

$x=0, y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

**21.** 두 점 $(4,-2),(2,-3)$을 지나는 직선의 $x$절편을 A, $y$절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4,-2),(2,-3)$를 지나는 직선은

$y=\frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3=\frac{1}{2}x-4$

$\Rightarrow x$절편은 8이고, $y$절편은 $-4$이다.

$\therefore$ $\triangle OAB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$ 이다.

**22.** 직선 $x+ay-1=0$ 과 $x$ 축, $y$ 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, $a$ 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 $x$ 절편은 $(1,\ 0)$ $y$ 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=2$

**23.** 세 점 $(0,2)$, $(3,-3)$, $(-3,a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 $a$의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: $a=7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0}=\dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a=7$

**24.** 평행한 두 직선 $x+y-1=0$과 $x+y+3=0$사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $4$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

두 직선은 평행하므로,
직선 $x+y-1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$에서
직선 $x+y+3=0$ 에 이르는 거리를 구한다.

$\therefore\ \dfrac{|1+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

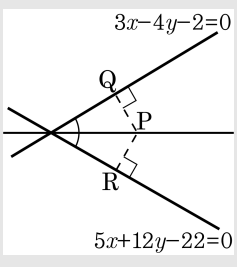
**25.** 두 직선 $3x-4y-2=0$ , $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1$

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면




$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$