

1. $-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 일 때, $a < x - y < b$ 를 계산하여 $b - a$ 의 값을 구하면?

① -14

② 1

③ 3

④ 5

⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 에서
 $x - y$ 의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$
가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$
 $\therefore -4 < x - y < 1$ 이므로 $a = -4$, $b = 1$
 $b - a = 1 + 4 = 5$

2. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 연립방정식은
 $26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 연립방정식을 풀면
 $A = -2$, $B = 0$, $C = -24 \cdots \textcircled{5}$

3. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

- ① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 5x^3 - 20x - 16 \\ &= (x+1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \\ &= (x+1)(x+4)(x^2 - 4) \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x-2) \\ &\text{따라서 네근은 } -1, -2, -4, 2 \\ &\therefore \text{네근의 제곱의 합은 } 1 + 4 + 16 + 4 = 25 \end{aligned}$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 네 점 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square OABC$ 가 평행사변형일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 $OABC$ 에서 두 대각선 OB , AC 의 중점이 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

6. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$

② $(1, 1)$

③ $(0, 1)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
 a 의 값에 관계없이 점(0, 1) 을 지나는 직선이다.

7. a, b 는 실수라 한다. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + a^2x + b^2 - 2a = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + a^2\alpha + b^2 - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 $(a^2 + 2a)\alpha - (a^2 + 2a) = 0$
 $\therefore (a^2 + 2a)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore a^2 + 2a = 0$ 또는 $\alpha = 1$
그런데 $a^2 + 2a = 0$ 일 때는 $a^2 = -2a$ 이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1 + a^2 + b^2 - 2a = 0$
 $\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0$
 a, b 는 실수이므로 $a - 1 = 0, b = 0$
 $\therefore a + b = 1$

8. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

9. 두 점 A(3,4), B(6,2)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

- ① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
④ (4, 0) ⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$AP = \sqrt{(a-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$$

$$BP = \sqrt{(a-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

조건에서 $AP = BP$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 6a + 25} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 - 6a + 25 = a^2 - 12a + 40$$

$$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

10. x, y 에 대한 연립방정식 $2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 평행해야 한다.

따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \text{에서}$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

1) $a = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq -\frac{1}{2} \therefore \text{평행}$$

2) $a = -1$ 일 때,

$$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a = 2$

11. 직선 $y = -3x + 12$ 와 원 $x^2 + (y - 2)^2 = 20$ 의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $(1, 2), (3, 5)$ ② $(2, 6), (4, 0)$ ③ $(3, 5), (3, 4)$
④ $(4, 6), (2, 3)$ ⑤ $(5, 5), (3, 3)$

해설

$y = -3x + 12 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
 $x^2 + (y - 2)^2 = 20 \dots\dots\dots \textcircled{2}$ 에서
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $x^2 + (-3x + 10)^2 = 20, x^2 - 6x + 8 = 0,$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x = 2$ 일 때 $y = 6,$
 $x = 4$ 일 때 $y = 0$ 이므로
구하는 교점의 좌표는 $(2, 6), (4, 0)$

12. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1 < 2x+y < 1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]
 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=(㉠)$ 이 된다.
 $-1 < 2x+y < 1$ 를 풀 때 y 대신 $y=(㉠)$ 을 대입하면 $-1 < -x-1 < 1$ 이 된다.
부등식을 풀면 $-2 < x < 0$ 이 되므로 정수인 x 는 $(㉡)$ 이 된다.
 x 값을 $(㉠)$ 에 대입하면 $y=(㉢)$ 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$$2(x+2y)+1=-x+3y$$

$$2x+4y+1=-x+3y$$

$$4y-3y=-x-2x-1$$

$$y=-3x-1$$

$-1 < 2x+y < 1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$$-1 < 2x+(-3x-1) < 1$$

$$-1 < -x-1 < 1$$

$$0 < -x < 2$$

$$-2 < x < 0$$

정수인 x 는 -1 이 된다.

x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

13. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{3}$ 하면 $6 + 3b > 0$

$\therefore b > -2$

이것과 $\textcircled{2}$ 에서 $-2 < b < 0$

$\therefore b = -1$ ($\because b$ 는 정수)

이 값을 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에 대입하면

$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$

$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$

$\therefore a = -1$ ($\because a$ 는 정수)

$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$

14. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

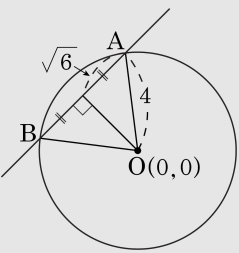
두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$
 $\therefore a^2 - 3a = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

15. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

- ① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, |k| = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{5} (\because k > 0)$$