1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 없는 것은?

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ii) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은

② $\dfrac{1}{3}$

2. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

해설

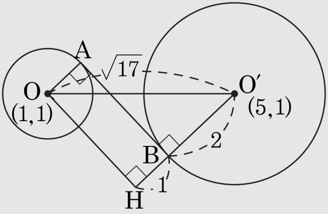
두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$ 이므로

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{17-3^2}$

$=2\sqrt{2}$



따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

3. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x + a \le x^2 \le 2x + b$ 가 항상 성립할 때, $b - a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x + a \le x^2 \le 2x + b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

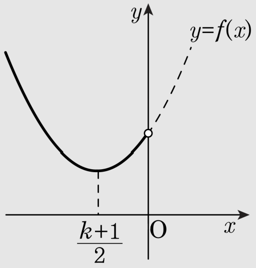
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



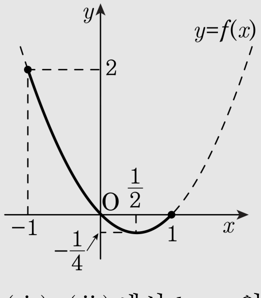
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x - 1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b - a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore\ 100p = 325$