

1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x = -1, 1, 2$$

$$\therefore -1 + 1 + 2 = 2$$

2. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

3. 다음 연립방정식의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 3x + y - 2z = 3 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ x - 2y + z = 5 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \times 3$ 을 하면 $-x + 3y = -5 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \times 2$ 를 하면 $5x - 3y = 13 \cdots \cdots \textcircled{㉥}$

$\textcircled{㉤} + \textcircled{㉥}$ 을 하면 $4x = 8 \therefore x = 2$

$x = 2$ 를 $\textcircled{㉤}$ 에 대입하면 $-2 + 3y = -5 \therefore y = -1$

또, $x = 2$, $y = -1$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$2 - 2 \cdot (-1) + z = 5$$

$$\therefore z = 1$$

$$\therefore x = 2, y = -1, z = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} px + y = 1 \\ x + py = 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때의 p 값으로 알맞은 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $\frac{1}{2}$

⑤ -2

해설

$ax + by = c$, $dx + ey = f$ 일때,

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ 이면 해가 없음,

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ 이면 해가 무수히 많다.

$$p = \frac{1}{p} \neq 1$$

$$\therefore p = -1$$

5. 세 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$

③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$ 이면 $a > b, c > 0$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$

해설

① $a > 0 > b$ 인 경우에서 $|b| > |a|$ 라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$ 의 결과가 나온다.

② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.

④ $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$ 일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$ 이면 $a < b, c < 0$ 인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.

⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \leq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \leq 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0 \text{ 위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가}$$

$a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$ 을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

6. $-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 일 때, $a < x - y < b$ 를 계산하여 $b - a$ 의 값을 구하면?

① -14

② 1

③ 3

④ 5

⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 에서

$x - y$ 의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$

가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$

$\therefore -4 < x - y < 1$ 이므로 $a = -4$, $b = 1$

$b - a = 1 + 4 = 5$

7. 부등식 $ax + 1 \geq 2x + 5$ 의 해가 $x \geq 2$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 4

⑤ 7

해설

$ax + 1 \geq 2x + 5$ 에서 $(a - 2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$ 이므로

$$a - 2 > 0$$

$$x \geq \frac{4}{a - 2} \text{이므로 } \frac{4}{a - 2} = 2, a - 2 = 2$$

$$\therefore a = 4$$

8. 이차부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$ 을 풀면?

① $-15 < x < 12$

② $-15 < x < 5$

③ $-7 < x < 5$

④ $-7 < x < 2$

⑤ $-5 < x < 7$

해설

$$x^2 + 2x - 35 < 0 \text{ 에서 } (x + 7)(x - 5) < 0$$

$$\therefore -7 < x < 5$$

9. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서

정수인 것의 개수는?

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 4 개

해설

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \iff (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$2x^2 - 5x < 3 \iff 2x^2 - 5x - 3 < 0$$

$$\iff (2x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{의 공통 범위는 } -\frac{1}{2} < x < 3$$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

10. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{cases}$ 의 해를 바르게 구한 것을 고르면?

① $-1 \leq x < 4$

② $3 < x \leq 4$

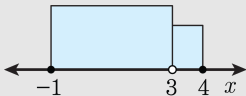
③ $-1 \leq x < 3$

④ $-1 \leq x < 3$ 또는 $3 < x \leq 4$

⑤ 해가 없다

해설

$$\begin{cases} (x-3)^2 > 0 & : x \neq 3 \text{인 모든 실수} \\ (x-4)(x+1) \leq 0 & : -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$\therefore -1 \leq x < 3$ 또는 $3 < x \leq 4$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ x - y = 1 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

12. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x - y = 1 & \dots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x = y + 1$ 을 ②에 대입하면,

$$(y + 1)^2 + y^2 = 5$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$\therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 1$$

$$y = -2 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } x = -1$$

$$y = 1 \text{을 } \textcircled{B} \text{에 대입하면 } x = 2$$

$$\therefore xy = 2$$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2+y^2=5 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$

$$5=1^2+2xy$$

$$\therefore xy=2$$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

15. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2 - 2bx + a < 0$ 의 해는?

- ① $x < -7$ 또는 $x > -5$ ② $-7 < x < -5$
 ③ $-7 < x < 5$ ④ $5 < x < 7$
 ⑤ $x < 5$ 또는 $x > 7$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 이므로

$$(14x - 1)(10x - 1) < 0, \quad 140x^2 - 24x + 1 < 0$$

$$-140x^2 + 24x - 1 > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0$$

$$\therefore a = -140, b = 24, c = -1 \cdots (가)$$

(가)를 $4cx^2 - 2bx + a < 0$ 에 대입하면

$$-4x^2 - 48x - 140 < 0$$

$$x^2 + 12x + 35 > 0, \quad (x + 7)(x + 5) > 0$$

$$\therefore x < -7 \text{ 또는 } x > -5$$

16. 부등식 $|x - 2| < k$ 를 만족하는 모든 x 의 값이 부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족할 때, 실수 k 의 최댓값은? (단, $k > 0$)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 풀면

$$-8 \leq x^2 - 8 \leq 8$$

$$0 \leq x^2 \leq 16$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 4$$

$k > 0$ 이므로 부등식 $|x - 2| < k$ 을 풀면

$$-k < x - 2 < k$$

$$-k + 2 < x < k + 2$$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족하려면

$$-k + 2 \geq -4, \quad k + 2 \leq 4 \text{ 이어야 하므로}$$

$$k \leq 6, \quad k \leq 2$$

$$\therefore 0 < k \leq 2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.

17. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 0$

② $-1 < a < 3$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $-1 < a < 4$

⑤ $-1 \leq a \leq 4$

해설

(i) $a = 0$ 일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 에서 $D \leq 0$ 이므로
 $a^2 - 3a \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 3 (\because a \neq 0)$

18. 다음 연립방정식
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \dots\dots \textcircled{㉡} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 3 \dots\dots \textcircled{㉢} \end{cases}$$
 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{1}{2}$ 또는 0.5

▷ 정답 : $y = 1$

▷ 정답 : $z = 1$

해설

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{1}{z} = 1, \therefore z = 1$$

$$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{1}{x} = 2, \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{1}{y} = 1 \therefore y = 1$$

19. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 의 공통근이 2이므로 $x = 2$ 를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$$2^2 - 2a + 10 = 0, 2^2 + 2 + b = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

이 때, $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \text{ 이므로 } x = 2, 5$$

또, $x^2 + x - 6 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \text{ 이므로 } x = 2, -3$$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은 5, -3이므로 두 근의 합은 2이다.

20. 0이 아닌 실수 x, y 가 $(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 을 만족할 때, x 에 관한 이 방정식은 실수 a 에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. ($a \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0 \text{에서}$$

$$x^2y^2 + 4a^2x^2 + y^2 + 4a^2 - 8axy = 0$$

$$(x^2y^2 - 4axy + 4a^2) + (y^2 - 4axy + 4a^2x^2) = 0$$

$$(xy - 2a)^2 + (y - 2ax)^2 = 0$$

$xy - 2a, y - 2ax$ 는 실수이므로

$$xy - 2a = 0, y - 2ax = 0$$

$$\therefore xy = 2a, y = 2ax$$

두 식을 연립하면, $2ax^2 = 2a$

$$(a \neq 0) \text{이므로 } x^2 = 1, x = \pm 1$$

21. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

22. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha$, $y = \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

23. 부등식 $|x| + |x-2| \leq 3$ 을 풀면 $m \leq x \leq n$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x < 0$ 일 때

$$-x - x + 2 - 3 \leq 0$$

$$-2x \leq 1$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

ii) $0 \leq x < 2$ 일 때

$$x - x + 2 \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq x < 2$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$2x - 2 \leq 3$$

$$2x \leq 5$$

$$\therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

i), ii), iii)에서 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}, n = \frac{5}{2}, m + n = 2$$

24. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + 2 - p = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p 의 값의 범위는?

① $0 < p < 1$

② $\frac{1}{2} < p < 1$

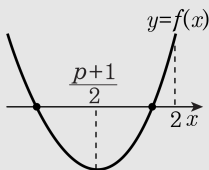
③ $1 \leq p < 2$

④ $1 < p < \frac{4}{3}$

⑤ $p > 1$

해설

$f(x) = x^2 - (p+1)x + 2 - p$ 라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (p+1)^2 - 4(2-p) > 0$$

$$p^2 + 6p - 7 > 0, (p+7)(p-1) > 0$$

$$\therefore p < -7 \text{ 또는 } p > 1$$

(ii) $f(2) > 0$ 에서 $2^2 - (p+1) \cdot 2 + 2 - p > 0$

$$3p < 4$$

$$\therefore p < \frac{4}{3}$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = \frac{p+1}{2}$ 이므로

$$\frac{p+1}{2} < 2$$

$$\therefore p < 3$$

(i), (ii), (iii)에서 $p < -7$ 또는 $1 < p < \frac{4}{3}$

그런데 $p > 0$ 이므로 $1 < p < \frac{4}{3}$

25. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

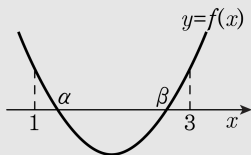
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 > 0 \text{ 에서 } (a+4)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 4$$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$$f(3) = 13 - 3a > 0 \text{ 에서 } a < \frac{13}{3}$$

$$\therefore a < \frac{13}{3}$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$$x = \frac{a}{2} \text{ 이므로 } 1 < \frac{a}{2} < 3$$

$$\therefore 2 < a < 6$$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$