

1. 다음은 유리식과 무리식의 정의이다.

유리식: 두 다항식 A, B($B \neq 0$)에 대하여, $\frac{A}{B}$ 와같이 분수의 꼴로 나타내어지는식, 특히 B가 상수인 유리식 $\frac{A}{B}$ 는 다항식이므로 다항식도 유리식이다. 한편, 유리식 중에서 다항식이 아닌 유리식을 분수식이라고 한다.
무리식: 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로 유리식으로 나타낼 수 없는 식

주어진 식에 대한 설명으로 바르게 짝지어진 것을 고르면?

- ① $\frac{x^2+5}{3x+2}$ -다항식

② $\sqrt{2}x+3$ -유리식
- ③ $\frac{x^2-1}{3}$ -분수식

④ $\sqrt{x^2-1}$ -유리식
- ⑤ $2x+\sqrt{x^2+5}$ -다항식

해설

① 분수식 ③유리식 ④무리식 ④무리식

2. 다음 중 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 인 관계가 성립될 수 없는 경우는?

① $a > 0, b > 0$

② $a > 0, b < 0$

③ $a < 0, b > 0$

④ $a < 0, b < 0$

⑤ $ab < 0$

해설

$a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

3. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 을 계산하면 $a+b\sqrt{c}$ 가 된다. 이때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5-2\sqrt{6}$$

$$a=5, b=-2, c=6$$

$$\therefore a+b+c=9$$

4. $3 - \sqrt{2}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + \frac{2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{2}$

해설

$1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $a = 1, b = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } a + \frac{2}{b} &= 1 + \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} \\ &= 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

5. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값은?

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1$, $x + y = 4$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$$

$$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$$

6. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

7. 다음 ()안에 알맞은 것은?

1-2i, 2-4i, 3-8i, 4-16i, (),...

- ① 5-18i

② 5-20i

③ 5-24i

④ 5-32i

⑤ 5-64i

해설

주어진 복소수의 배열을
 $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i, a_4 + b_4i, \dots$ 와 같이 생각한다면
(단, a_k, b_k 는 실수)
수열 $\{a_n\}$ 의 배열은 1, 2, 3, 4, (), ... 이고
수열 $\{b_n\}$ 의 배열은 -2, -4, -8, -16, (), ... 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5 - 32i$ 이다.

8. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

9. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ 이므로 } a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$$

11. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

16, - 8, 4, - 2, ……

- ① $8(-2)^n$
- ② $16(-2)^{n-1}$
- ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
- ④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

12. 세 수 $x-4$, x , $x+8$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 $x-4$, x , $x+8$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x-4)(x+8), \quad x^2 = x^2 + 4x - 32$$

$$4x = 32 \therefore x = 8$$

13. 제 4 항이 -16, 제 7 항이 128 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{3}(2^{20} - 1)$ ② $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$ ③ $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$
④ $2(1 - 2^{20})$ ⑤ $2(1 + 2^{20})$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = -16, ar^6 = 128$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2, a = 2$$

$$S_{20} = \frac{2\{1 - (-2)^{20}\}}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 2^{20})$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

15. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면

$\textcircled{1}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로

$$3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$$

16. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

17. $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$

② $24\sqrt{3}$

③ $30\sqrt{3}$

④ 48

⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 = 52 \end{aligned}$$

18. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y = x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k = -2$ 또는 $k > 1$

② $k = -1$ 또는 $k < -2$

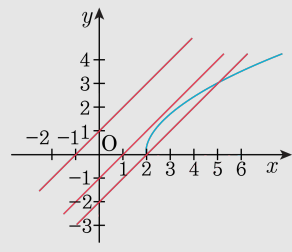
③ $k = 1$ 또는 $k > 2$

④ $k = 2$ 또는 $k < -1$

⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$ 에서

$$4x-8 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 + 8) = -4k - 4 = 0 \text{에서 } k = -1$$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

19. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $\frac{3}{2} < k < 2$ ② $\frac{3}{2} \leq k < 2$ ③ $\frac{3}{2} \leq k \leq 2$
 ④ $\frac{3}{2} < k \leq 2$ ⑤ $1 \leq k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$$

이것이 중근을 가지므로

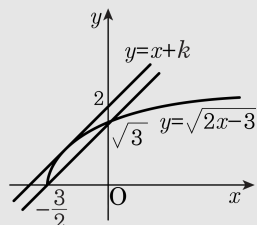
$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = -2k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

(ii) 직선 $y = x + k$ 가 점 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날때

$$0 = -\frac{3}{2} + k$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$



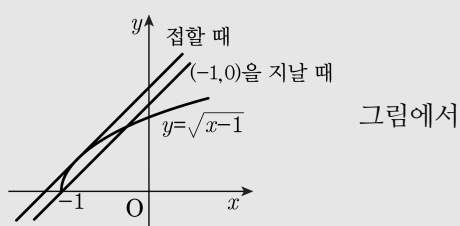
(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$$\frac{3}{2} \leq k < 2$$

20. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x+a$ 의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 \leq a < \frac{5}{4}$ ② $1 < a < \frac{5}{4}$ ③ $1 \leq a \leq \frac{5}{4}$
 ④ $2 \leq a < \frac{5}{4}$ ⑤ $1 \leq a < 3$

해설



(i) $y = x + a$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때, $a = 1$

(ii) $y = x + a$ 와 $y = \sqrt{x + 1}$ 이 접할 때

$x + a = \sqrt{x + 1}$ 에서 양변을 제곱하면

$$(x + a)^2 = x + 1$$

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 1 = 0$$

$$D = (2a - 1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$$

$$-4a + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}$$

(i), (ii) $1 \leq a < \frac{5}{4}$

21. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $b, \frac{a}{2}, 7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루고, $a, -3, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 9 ② 33 ③ 50 ④ 67 ⑤ 81

해설

$$\frac{a}{2} = \frac{b+7}{2} \Rightarrow a-b=7$$

$$(-3)^2 = ab \Rightarrow ab=9$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 &= (a-b)^2 + 2ab \\ &= 7^2 + 2 \times 9 = 67 \end{aligned}$$

22. 등식 $a(1+3\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})=-4+9\sqrt{2}$ 를 만족하는 유리수 a, b 의 값은?

① $a=1, b=-3$

② $a=1, b=-2$

③ $a=2, b=-3$

④ $a=-2, b=-1$

⑤ $a=-2, b=3$

해설

$(a+2b)+(3a-b)\sqrt{2}=-4+9\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{cases} a+2b=-4 \\ 3a-b=9 \end{cases} \quad \text{를 연립하면,}$$

$$\therefore a=2, b=-3$$

23. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P의 좌표를 구하면?

① (1, -2)

② (-3, -1)

③ (1, 1)

④ (-2, -2)

⑤ (1, 1), (-2, -2)

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$f(x) = x$ 의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1, -2$$

$$x = 1 (\because x \geq -1)$$

$$\therefore P = (1, 1)$$

24. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23

② 24

③ 25

④ 26

⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \cdot 45 + (n-1) \cdot (-4)\}}{2} = n(47-2n)$$

$$n(47-2n) < 0 \text{에서 } n < 0 \text{ 또는 } n > \frac{47}{2}$$

$$n > 0 \text{이므로 } n > \frac{47}{2} = 23.5$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

25. 첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라

$$\text{하면 } a_n = -\frac{5}{2} + (n+1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} - \frac{17}{6}$$

이때, S_n 이 최소가 되려면 음수인 항만 더하면 되므로

$$\frac{n}{3} - \frac{17}{6} < 0 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은 8이다.