1. 이차방정식 $x^2-6x-4=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, x^2 의 계수는 4이다.)

① $6x^2+4x-1=0$
② $3x^2+6x+1=0$
③ $2x^2+6x+1=0$
④ $4x^2+6x+1=0$
⑤ $4x^2+6x-1=0$

해설

이차방정식 $x^2-6x-4=0$ 의 두 근이 α, β 일때, $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-4$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+6x-1=0$

2. 이차함수 $y=-x^2+2x+3$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 나타낼 때, $p+q$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$y=-x^2+2x+3$
$=-(x^2-2x+1-1)+3$
$=-(x-1)^2+4$
$\therefore\ p=1,\ q=4$
$\therefore\ p+q=1+4=5$

3. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$을 철수는 상수항을 잘못보고 풀어서 근이 $-3,\ 7$이 나왔고, 영희는 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 근이 $2,\ -6$이 나왔다. 올바른 이차방정식의 근을 구했을 때 두 근의 곱은?

① 4　　② 8　　③ -8　　④ 12　　⑤ -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로 근과 계수와의 관계에서
$a = -3 + 7 = 4$
영희는 일차항의 계수를 잘못 보았으므로
$b = 2 \times (-6) = -12$
따라서 $x^2 - 4x - 12 = 0$, $(x+2)(x-6) = 0$, $x = -2$ 또는 $x = 6$
$\therefore$ 두 근의 곱은 -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로
$(x+3)(x-7) = 0,\ x^2 - 4x - 21 = 0$ 에서 일차항의 계수는 -4
영희는 일차항의 계수를 잘못보았으므로
$(x-2)(x+6) = 0,\ x^2 + 4x - 12 = 0$ 에서 상수항은 -12
따라서 올바른 방정식은 $x^2 - 4x - 12 = 0$ $(x-6)(x+2) = 0,\ x = 6, -2$
$\therefore$ 두 근의 곱은 -12

4. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \beta+\dfrac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2+6x-2=0$　　② $x^2-6x+2=0$
③ $x^2+6x-4=0$　　④ $x^2-6x+4=0$
⑤ $x^2+6x-6=0$

해설

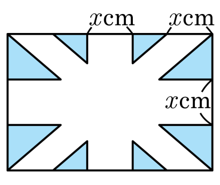
α, β 는 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이므로
$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$
구하는 방정식의 두 근이 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \beta+\dfrac{1}{\alpha}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 합}) &= \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\\ &= \alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\\ &= \alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱}) &= \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\\ &= \alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+4=0$ 이다.

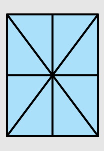
5. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



① 2 cm ② 3 cm
③ 4 cm ④ 2 cm 또는 7 cm
⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9-3x$, 세로가 $6-x$인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9-3x)(6-x)=12$



정리하면 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

$x<3$이므로 $x=2$

6. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 만족시키는 실근을 p, q라 할 때 $(p-q)^2 \neq 0$ 이 성립한다. 실수 x에 대하여 이차방정식 $bx^2+2(a-2c)x-b=0$의 해의 개수와 이차방정식 $x^2+2(a+c)x+6(ac-a^2)+b^2=0$의 해의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$(p-q)^2 \neq 0$ 에서 $p-q \neq 0$, $p \neq q$ 이므로 $ax^2+bx+c=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=b^2-4ac>0 \cdots$ ㉠

$bx^2+2(a-2c)x-b=0$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a-2c)^2+b^2 \\ &= a^2-4ac+4c^2+b^2 \\ &= a^2+4c^2+b^2-4ac\end{aligned}$$

그런데 ㉠에서 $b^2-4ac>0$ 이고 $a^2+4c^2 \geq 0$ 이므로 $a^2+4c^2+b^2-4ac>0$

따라서 $bx^2+2(a-2c)x-b=0$ 은 $D>0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

$x^2+2(b+c)x+6(bc-a^2)=0$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a+c)^2-6(ac-a^2)+b^2 \\ &= a^2+2ac+c^2-6qc+6a^2+b^2 \\ &= b^2-4ac+c^2+7a^2\end{aligned}$$

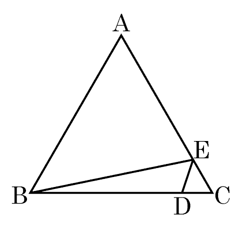
그런데 ㉠에서 $b^2-4ac>0$ 이고 $c^2+7a^2 \geq 0$ 이므로

$b^2-4ac+c^2+7a^2>0$

따라서 $x^2+2(a+c)x+6(ac-a^2)+b^2=0$ 은 $D>0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 두 이차방정식의 근의 개수의 합은 4

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6 인 정삼각형에서 $\angle BED = 60\,^{\circ}$, $\overline{CD} = 1$ 일 때, 선분 AE 의 길이를 구하여라. (단, $\overline{AE} > 3$)



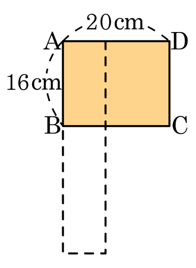
▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{3}$

해설

$\triangle ABE \backsim \triangle CED$ (AA 닮음) 이므로
$\overline{AB} : \overline{CE} = \overline{AE} : \overline{CD}$
$\overline{AE} = x$ 라 놓으면
$6 : (6 - x) = x : 1$
$\therefore\ 6x - x^2 = 6,\ x^2 - 6x + 6 = 0$
$\therefore\ x = 3 + \sqrt{3}\ (\because\ x > 3)$

8. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20cm , 16cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 매초 2cm 씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 4cm 씩 늘어난다고 할 때, 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지는데 걸리는 시간은?



① 2 초　　② 4 초　　③ 6 초

④ 8 초　　⑤ 10 초

해설

구하는 시간을 x 초 라 하면

처음 넓이는 $20 \times 16 = 320$

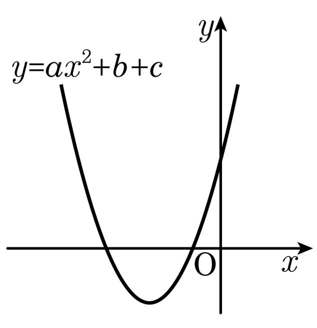
x 초 후의 넓이는 $(20-2x)(16+4x)$ 이다.

따라서 $(20-2x)(16+4x) = 320$

$-8x^2 + 48x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $a + b + c > 0$　　② $a < 0$　　③ $b > 0$

④ $c < 0$　　⑤ $a - b + c < 0$

해설

아래로 볼록이므로 $a > 0$

축의 방정식 $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b > 0$

y 절편이 양수이므로 $c > 0$

한편 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

① $f(1) = a + b + c > 0$

⑤ $f(-1) = a - b + c$: 판단할 수 없다.