

1. 이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, x^2 의 계수는 4이다.)

① $6x^2 + 4x - 1 = 0$

② $3x^2 + 6x + 1 = 0$

③ $2x^2 + 6x + 1 = 0$

④ $4x^2 + 6x + 1 = 0$

⑤ $4x^2 + 6x - 1 = 0$

해설

이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 일때, $\alpha + \beta = 6$,
 $\alpha\beta = -4$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

양변에 4를 곱하면 $4x^2 + 6x - 1 = 0$

2. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 3$ 을 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 나타낼 때, $p + q$ 의 값은?

① 6

② 5

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= -(x - 1)^2 + 4 \\ \therefore p &= 1, q = 4 \\ \therefore p + q &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

3. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 을 철수는 상수항을 잘못보고 풀어서 근이 $-3, 7$ 이 나왔고, 영희는 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 근이 $2, -6$ 이 나왔다. 올바른 이차방정식의 근을 구했을 때 두 근의 곱은?

① 4

② 8

③ -8

④ 12

⑤ -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로 근과 계수와의 관계에서

$$a = -3 + 7 = 4$$

영희는 일차항의 계수를 잘못 보았으므로

$$b = 2 \times (-6) = -12$$

따라서 $x^2 - 4x - 12 = 0$, $(x+2)(x-6) = 0$, $x = -2$ 또는 $x = 6$
 $\therefore$ 두 근의 곱은 -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로

$$(x+3)(x-7) = 0, x^2 - 4x - 21 = 0 \text{ 에서 일차항의 계수는 } -4$$

영희는 일차항의 계수를 잘못보았으므로

$$(x-2)(x+6) = 0, x^2 + 4x - 12 = 0 \text{ 에서 상수항은 } -12$$

따라서 올바른 방정식은 $x^2 - 4x - 12 = 0$ $(x-6)(x+2) = 0$, $x = 6, -2$

$\therefore$ 두 근의 곱은 -12

4. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2 + 6x - 2 = 0$

② $x^2 - 6x + 2 = 0$

③ $x^2 + 6x - 4 = 0$

④ $x^2 - 6x + 4 = 0$

⑤ $x^2 + 6x - 6 = 0$

해설

α, β 는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$$

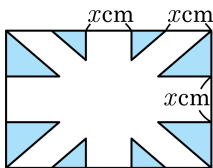
구하는 방정식의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 합}) &= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) \\&= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\beta} \\&= \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱}) &= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) \\&= \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 4\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 이다.

5. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



① 2 cm

② 3 cm

③ 4 cm

④ 2 cm 또는 7 cm

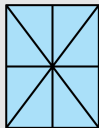
⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9 - 3x$, 세로가 $6 - x$ 인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9 - 3x)(6 - x) = 12$

정리하면 $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = 0$

$x < 3$ 이므로 $x = 2$



6. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 만족시키는 실근을 p, q 라 할 때 $(p-q)^2 \neq 0$ 이 성립한다. 실수 x 에 대하여 이차방정식 $bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 의 해의 개수와 이차방정식 $x^2 + 2(a+c)x + 6(ac-a^2) + b^2 = 0$ 의 해의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(p-q)^2 \neq 0$ 에서 $p-q \neq 0, p \neq q$ 이므로 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D = b^2 - 4ac > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a-2c)^2 + b^2 \\ &= a^2 - 4ac + 4c^2 + b^2 \\ &= a^2 + 4c^2 + b^2 - 4ac \end{aligned}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $b^2 - 4ac > 0$ 이고 $a^2 + 4c^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 + 4c^2 + b^2 - 4ac > 0$

따라서 $bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 은 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

$x^2 + 2(b+c)x + 6(bc-a^2) = 0$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+c)^2 - 6(ac-a^2) + b^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - 6ac + 6a^2 + b^2 \\ &= b^2 - 4ac + c^2 + 7a^2 \end{aligned}$$

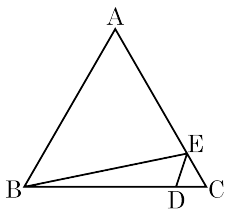
그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $b^2 - 4ac > 0$ 이고 $c^2 + 7a^2 \geq 0$ 이므로

$$b^2 - 4ac + c^2 + 7a^2 > 0$$

따라서 $x^2 + 2(a+c)x + 6(ac-a^2) + b^2 = 0$ 은 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 두 이차방정식의 근의 개수의 합은 4

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6 인 정삼각형에서 $\angle BED = 60^\circ$, $\overline{CD} = 1$ 일 때, 선분 AE 의 길이를 구하여라. (단, $\overline{AE} > 3$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{3}$

해설

$\triangle ABE \sim \triangle CED$ (AA 닮음) 이므로

$$\overline{AB} : \overline{CE} = \overline{AE} : \overline{CD}$$

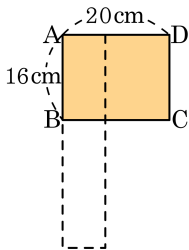
$\overline{AE} = x$ 라 놓으면

$$6 : (6 - x) = x : 1$$

$$\therefore 6x - x^2 = 6, x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 3 + \sqrt{3} \quad (\because x > 3)$$

8. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20cm, 16cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 매초 2cm 씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 4cm 씩 늘어났다고 할 때, 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아 지는데 걸리는 시간은?



① 2 초

② 4 초

③ 6 초

④ 8 초

⑤ 10 초

해설

구하는 시간을 x 초 라 하면

처음 넓이는 $20 \times 16 = 320$

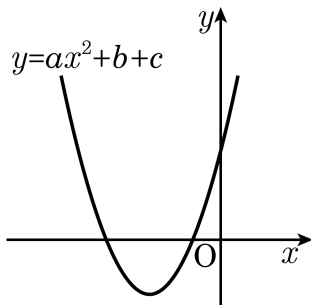
x 초 후의 넓이는 $(20 - 2x)(16 + 4x)$ 이다.

따라서 $(20 - 2x)(16 + 4x) = 320$

$-8x^2 + 48x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $a + b + c > 0$

② $a < 0$

③ $b > 0$

④ $c < 0$

⑤ $a - b + c < 0$

해설

아래로 볼록이므로 $a > 0$

축의 방정식 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b > 0$

y 절편이 양수이므로 $c > 0$

한편 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

① $f(1) = a + b + c > 0$

⑤ $f(-1) = a - b + c$: 판단할 수 없다.