1. 연립부등식

$$\begin{cases} 4x - a < 3x \\ 3(x-2) \geq 2x - 1 \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 10$ ② $a \leq 10$ ③ $a > 5$

④ $a \leq 5$ ⑤ $a > 3$

해설

$4x - a < 3x$, $x < a$, $3(x-2) \geq 2x - 1$, $x \geq 5$, 해가 없으려면 $a \leq 5$

2. 세 점 A$(1, 4)$, B $(-1, 2)$, C $(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2 ② 8 ③ 10 ④ -2 ⑤ -4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

3. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$ ② $-x + y - 14 = 0$

③ $x - y - 14 = 0$ ④ $x + y + 14 = 0$

⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2, y = 4x - 1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{3m + 4}{m + 1}x + \dfrac{2m - 1}{m + 1}$
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.
따라서, $\dfrac{3m + 4}{m + 1} = -1$
$\therefore m = -\dfrac{5}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서
$x = 3,\ y = 11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y - 11 = -1(x - 3)$
따라서, $y = -x + 14$

4. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

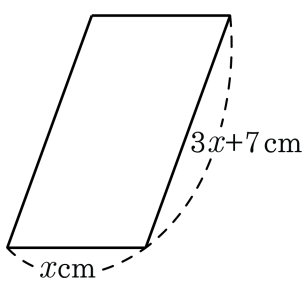
(ii) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\frac{1}{3}$

$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

5. 다음과 같은 평생사변형 모양의 상자를 만드는 데, 세로의 길이가 가로의 길이의 3 배 보다 7 cm 더 길게 하고, 둘레의 길이를 120cm 초과 150cm 이하로 만들려고 할 때, 가로의 길이가 될 수 없는 것은?



① 13 cm ② 14 cm ③ 15 cm ④ 16 cm ⑤ 17 cm

해설

둘레의 길이는 $2x+2(3x+7)$ 임으로, $120 < 8x+14 \le 150$ 이다.
$120 < 8x + 14 \le 150$ 를 연립부등식으로 나타내면
$\begin{cases} 120 < 8x+14 \\ 8x+14 \le 150 \end{cases}$ 이다. 간단히 하면 $\begin{cases} x > \frac{106}{8} \\ x \le \frac{136}{8} \end{cases}$ 이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{53}{4} < x \le 17$ 이다. 그럼으로 가로의 길이는 $\frac{53}{4} < x \le 17$ 이다. $\frac{53}{4} = 13.25$ 이므로 13 은 x 가 될 수 없다.

6. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3\le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는 ?

① $4\le a\le 12$　② $a\le 4,\ a\ge 12$　③ $6\le a\le 8$

④ $a\le 6,\ a\ge 8$　⑤ $4\le a\le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3\le 0$의 실수해가 존재하려면

$D=(a-6)^2-4(a-3)\ge 0$

$a^2-16a+48\ge 0,\ (a-4)(a-12)\ge 0$

$\therefore\ a\le 4,\ a\ge 12$

7. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(1,3), \mathrm{C}(2,0)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+3=0$ ③ $x-3y-2=0$
④ $x-4y+5=0$ ⑤ $x-5y+4=0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2 &= (x-2)^2+(y-1)^2\\ &= x^2-4x+4+y^2-2y+1\\ &= x^2-4x+y^2-2y+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x-1)^2+(y-3)^2\\ &= x^2-2x+1+y^2-6y+9\\ &= x^2-2x+y^2-6y+10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CP}}^2 &= (x-2)^2+y^2\\ &= x^2-4x+4+y^2\\ &= x^2-4x+y^2+4\end{aligned}$$

$2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$2\left(x^2-4x+y^2-2y+5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2-4x+y^2+4\right)$

$3x^2-10x+3y^2-10y+20 = 3x^2-12x+3y^2+12$

$2x-10y+8=0$

$\therefore x-5y+4=0$

8. 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-12)^2+y^2=9$ 의 공통내접선의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

두 원의 중심 사이의 거리는 12
내접선의 길이를 L 이라 하면,
$L^2=12^2-9^2$
$\therefore\ L=3\sqrt{7}$

9. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$　② $-1 \le x \le 1$　③ $x \ge 1$

④ 해는 없다.　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

10. $|p|<2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2+px+1>2x+p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x=-1$, $x \ge 1$　② $x \le -1$, $x=1$, $x \ge 3$

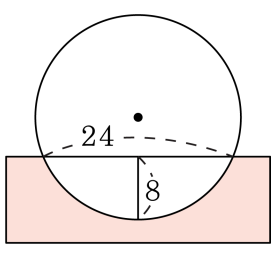
③ $x \le -3$, $x \ge 1$　④ $x \le -1$, $x \ge 3$

⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2+px+1>2x+p$, $(x-1)p+x^2-2x+1>0$
$f(p)=(x-1)p+x^2-2x+1$ 이라 하면
$-2<p<2$ 에서 $f(p)>0$ 이기 위한 조건은
$f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2-4x+3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots$㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2-1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x=1$, $x \ge 3$
그런데 $x=1$ 일 때,
$f(p)=0 \cdot p+1^2-2 \cdot 1+1=0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

11. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



① $6\sqrt{3}$ ② 13 ③ $8\sqrt{3}$ ④ 16 ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를
r라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$
$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
$\therefore r = 13$

12. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

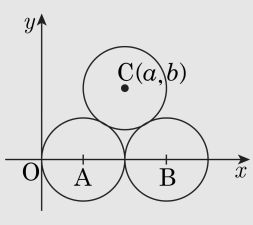
① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0) 이다.
$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가 정삼각형이므로 C(a, b) 라 하면
$a = 1 + \overline{AC}\cos 60°$, $b = \overline{AC}\sin 60°$
$\therefore$ C(2, $\sqrt{3}$)
따라서 원 C_3 는 중심이 (2, $\sqrt{3}$) 이고 반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서 원의 중심 C(2, $\sqrt{3}$) 까지의 거리는

$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$

$\therefore d \times r = \sqrt{7}$



13. 다음의 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수의 최댓값은?

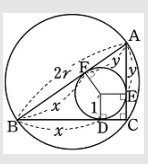
내접원의 반지름의 길이가 1인 직각삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 r 라 하면, $r \geq \square$ 이다.

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$

④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

해설

아래 그림과 같이 내접원의 반지름이 1인 직각삼각형 ABC와 내접원의 접점을 각각
, D, E, F 라 하고, $\overline{\mathrm{BD}}=x, \overline{\mathrm{AE}}=y$ 라 하면



$\overline{\mathrm{AB}}=2r$ 이고 $\overline{\mathrm{BF}}=x, \overline{\mathrm{AF}}=y$ 이므로
$2r=x+y\cdots$㉠
또, 피타고라스정리에 의하여
$(x+1)^2+(y+1)^2=(2r)^2\cdots$㉡
㉠에서 $y=2r-x$ 를 ㉡에 대입하여 정리하면
$x^2-2rx+2r+1=0\cdots$㉢
㉢이 실근을 가지므로
$D/4=r^2-(2r+1)\geq 0$
$\therefore\ r\geq 1+\sqrt{2}$

14. $N_1,\ N_2,\ N_3,\ \cdots,\ N_8$ 은 모두 자연수이고,$N_1 < N_2 < \cdots < N_8$, $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_8 = 80$ 이라 할 때, N_8 의 최댓값은? (단, $N_1 = 4$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_8$ 이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2$, $\cdots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$ 일 때, N_8 은 최댓값이 된다.

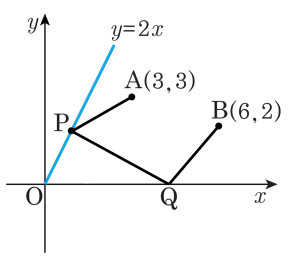
$\therefore\ N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \cdots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$

$7N_1 + (1 + 2 + \cdots + 6) + N_8 = 80$

$28 + 21 + N_8 = 80$

$\therefore\ N_8 = 80 - 49 = 31$

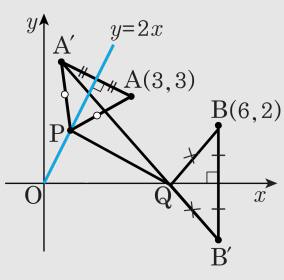
15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3,3), \mathrm{B}(6,2)$ 와 직선 $y=2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값은?



① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3,3)$ 을 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라고 하면



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}, \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 A′B′ 의 길이이다.

이때, 점 $\mathrm{A}'(a,b)$ 라고 하면

직선 AA′ 과 직선 $y=2x$ 가 수직이므로

$\frac{b-3}{a-3}\cdot 2=-1$

$\therefore a+2b=9 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 AA′ 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\frac{b+3}{2}=2\cdot\frac{a+3}{2}$

$\therefore 2a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{5},\ b=\frac{21}{5}$

$\therefore \mathrm{A}'\left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$

한편, 점 $\mathrm{B}'(6,-2)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\left(6-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-2-\frac{21}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2+\left(-\frac{31}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1690}{25}}=\frac{13\sqrt{10}}{5}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.