1. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$

④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면

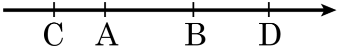
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로

$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$

$14x = 28$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

2. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은

i) m ( ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ 위에 있고,

ii) m ( ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

외분점을 P 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$ 이므로

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 위에 있다.

3. 두 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle OPQ$의 무게중심은 $G(-1, 1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$라 하면,

$\frac{0+x+0}{3}=-1$, $\frac{0+0+y}{3}=1$에서

$x=-3$, $y=3$

$\therefore P(-3, 0), Q(0, 3)$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a+3)^2+4^2=(1+3)^2+b^2$

$a^2+6a+9=b^2$

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$에서

$a^2+(4-3)^2=1^2+(b-3)^2$

$a^2=b^2-6b+9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a-b=-3$

4. 일차함수 $y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a - 2 = \tan 45° = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
$b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
$\therefore\ a + b = 6$

5. 직선 $x+2y+3=0$ 과 수직이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-y-4=0$　　② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y-4=0$　　④ $3x-y-4=0$

⑤ $3x-2y-4=0$

해설

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직이므로, 기울기은 2

$(2,0)$ 을 지나므로,

$\Rightarrow\quad y=2(x-2)$

$\Rightarrow\quad y=2x-4$

6. 두 직선 $ax+by+c=0$, $cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$　② $2x+y=5$　③ $2x-y=3$

④ $x+2y=5$　⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}\cdots$㉠

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\dfrac{c}{a}x-\dfrac{b}{a}\cdots$㉡

㉠,㉡이 일치하므로 $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{c}{a},\ -\dfrac{c}{b}=-\dfrac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\dfrac{a^2}{b},\ c=\dfrac{b^2}{a}$

$\therefore \dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2\neq 0\ )$

$\therefore c=\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ $: x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

7. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$
② $-\frac{1}{3}<m<1$
③ $-1<m<2$
④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$
⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠

$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

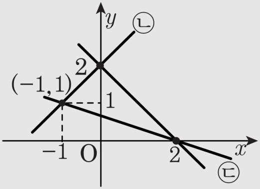
항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$

와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m

은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

8. 두 점 $(1,-3)$, $(3,2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y=2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y=2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$\sqrt{(1-a)^2+(-3-2a)^2}$

$=\sqrt{(3-a)^2+(2-2a)^2}$

$a^2-2a+1+4a^2+12a+9=a^2-6a+9+4a^2-8a+4$

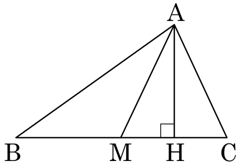
$10a+10=-14a+13$

$\therefore\ 24a=3$

$\therefore\ a=\frac{1}{8},\ 2a=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

9. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2+\overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2+\overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2+2\overline{BM}\cdot\overline{MH}+\boxed{\text{(나)}}^2 \cdots ㉠\end{aligned}$$
직각삼각형 AHC 에서
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2+\overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2+\overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2-2\overline{CM}\cdot\overline{MH}+\boxed{\text{(라)}}^2 \cdots ㉡\end{aligned}$$
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC}+\overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

② (가) $\overline{BC}+\overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM}-\overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM}-\overline{MH}$

해설

생략

10. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $\mathrm{A}\,(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

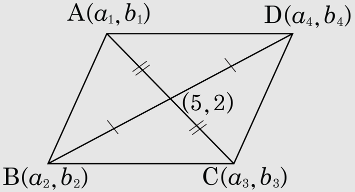
$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$ 이므로 $k^2=45$

11. 평행사변형 ABCD 의 두 대각선의 교점의 좌표가 $(5, 2)$ 일 때, 네 꼭짓점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ 의 x 좌표의 합은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설



평행사변형 ABCD 의 각 꼭짓점을 $\mathrm{A}(a_1, b_1)$, $\mathrm{B}(a_2, b_2)$, $\mathrm{C}(a_3, b_3)$, $\mathrm{D}(a_4, b_4)$ 라고 하자. 평행사변형의 두 대각선의 교점은 두 대각선을 각각 이등분한다.

따라서 교점 $(5, 2)$는 선분 AC 의 중점이므로

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = 5$$

$\therefore a_1 + a_3 = 10$

또한 교점 $(5, 2)$는 선분 BD 의 중점이기도 하므로

$$\frac{a_2 + a_4}{2} = 5$$

$\therefore a_2 + a_4 = 10$

따라서 네 꼭짓점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ 의 x 좌표의 합은

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 + 10 = 20$

12. 좌표평면 위의 세 점 $A(2,\ 4)$, $B(-2,\ 6)$, $C(6,\ 8)$ 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 변 AB 의 중점을 P, 변 BC 의 중점을 Q, 변 CA 의 중점을 R 이라 하자. $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 $\triangle PQR$ 의 무게중심은 같다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)+6}{3},\ \frac{4+6+8}{3}\right)=(2,\ 6)$$

따라서 $a=2,\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

13. 두 점 A$(3, 0)$, B$(0, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$
② $3x + 2y = 0$
③ $6x - 4y + 9 = 0$
④ $-3x + 2y = 0$
⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 P(x, y)라 하면

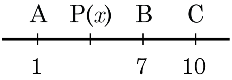
$\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 5$에서

$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$

정리하면 $-6x + 4y = 0$

$\therefore -3x + 2y = 0$

14. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서, $x=6$ 일 때 최소가 된다.

15. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

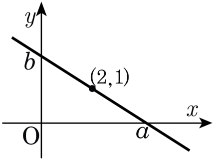
$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3 = \frac{1}{2}x-4$$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

16. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\dfrac{a}{2}=1$

② $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$

④ $\dfrac{2}{a}+b=1$

⑤ $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 이다.

17. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

18. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

주어진 조건에서

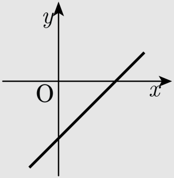
$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

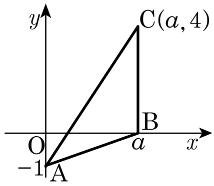
$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



19. 다음 그림과 같이 점 A$(0,\ -1)$, B$(a,\ 0)$, C$(a,\ 4)$를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



① $y=-\frac{4}{a}x+4$ ② $y=-\frac{3}{a}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{a}x+2$
④ $y=-\frac{2}{a}x+1$ ⑤ $y=-\frac{1}{a}x+4$

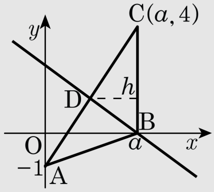
해설

$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=2a$

점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$와의 교점을 D,

$\triangle$BCD에서 $\overline{BC}$를 밑변으로 보았을 때 높이를 h라 하면



($\triangle$BCD의 넓이) $=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h=2h$

이 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$2h=a \qquad \therefore h=\frac{a}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a$

$\therefore$ D의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

두 점 B$(a, 0)$, D$\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$를 지나는

직선의 방정식은 $y-0=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{3}{a}x+3$

20. 직선 $(k+1)x-(k-2)y-3=0$에 대하여 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, k는 실수)

< 보 기>

ㄱ $k=-1$이면 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

ㄴ $k=2$이면 y축에 평행이다.

ㄷ k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $k=-1$이면 $y=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

ㄴ $k=2$이면 $x=1$이므로 y축에 평행이다.

ㄷ $(x-y)k+(x+2y-3)=0$이므로 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

21. 점 P(1, 2) 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 점 H 의 좌표는?

① $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$ ② $(2, 1)$ ③ $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$

④ $(1, 2)$ ⑤ $(2, 2)$

해설

H = (a, b) 라 하면, $\overline{PH}$ 는 $y = -2x + 3$ 에 수직하고 H 는 직선 위에 있다.

i) $\dfrac{b-2}{a-1} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a - 2b = -3$

ii) $b = -2a + 3$

i), ii) 를 연립하면, $a = \dfrac{3}{5}$ $b = \dfrac{9}{5}$

$\therefore \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

22. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$3x-y-6=0\ , \qquad 3x-y+k=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

23. 직선 $3x + 4y = 0$ 에 평행하고 원점으로부터 거리가3 인 직선 중 1 사분면을 지나는 직선의 y 절편은?

① 15 ② -15 ③ $\frac{15}{4}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ 3

해설

직선을 $3x + 4y + a = 0$ 라 하면,

$\frac{|a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ 에서

$\therefore\ a = \pm 15$

y 에 대해 정리하면 $y = -\frac{3}{4}x \pm \frac{15}{4}$

기울기가 음수인 직선이 1 사분면을 지나기 위해서는 y 절편은 양수이어야 한다.

따라서 이 직선의 y 절편은 $\frac{15}{4}$

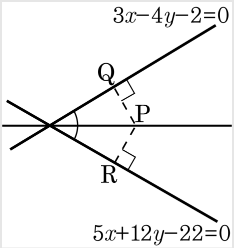
24. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

25. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$

④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설

$x=a \cdots$ ㉠

$y=a+b \cdots$ ㉡ 에서

a, b 를 소거한다.

점 (a, b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를

움직이므로 $2a-b-2=0$

$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면

$y=3a-2$

$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)